

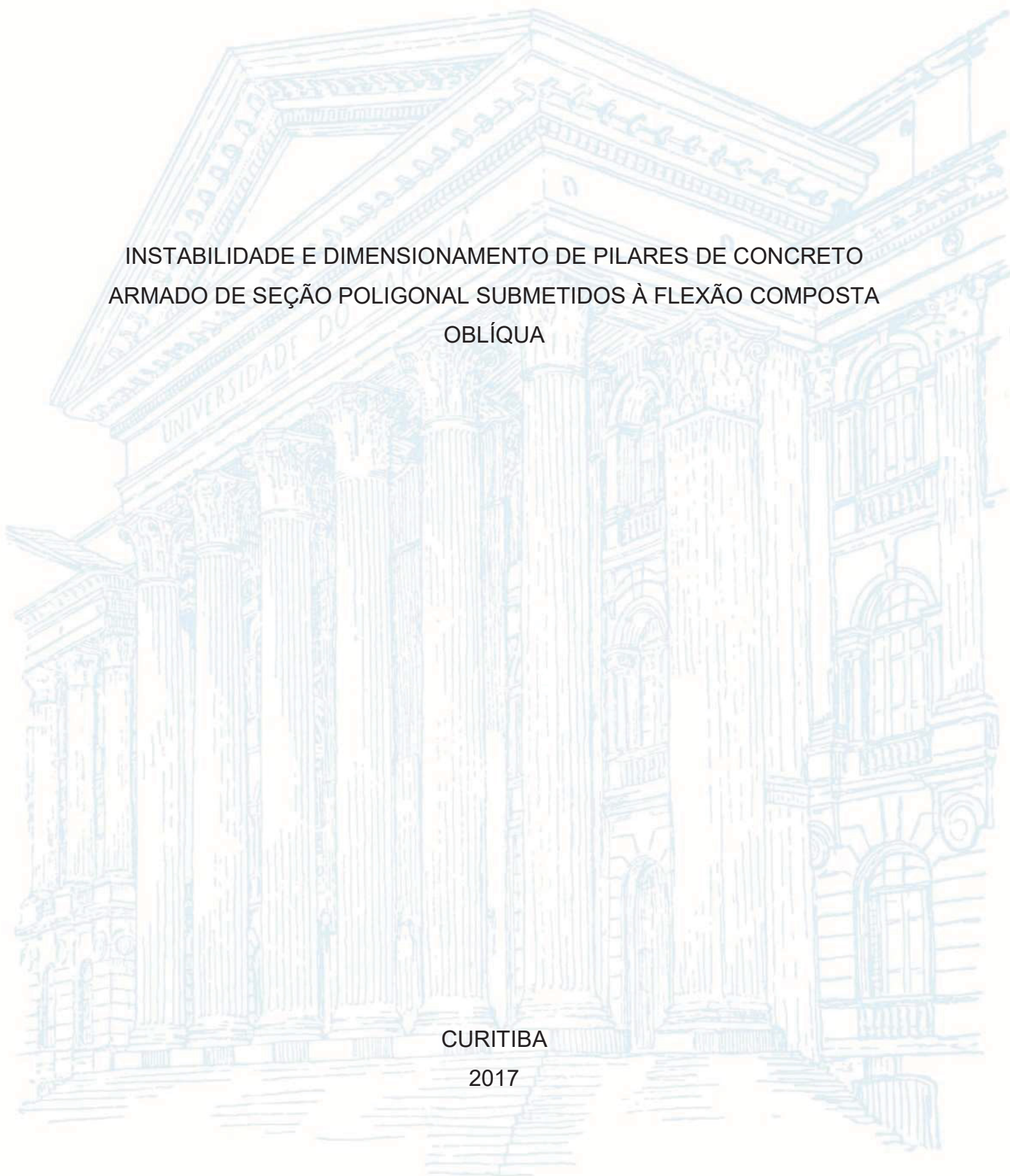
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS PERES DE SOUZA

INSTABILIDADE E DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO
ARMADO DE SEÇÃO POLIGONAL SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA
OBLÍQUA

CURITIBA

2017



LUCAS PERES DE SOUZA

INSTABILIDADE E DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO
ARMADO DE SEÇÃO POLIGONAL SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA
OBLÍQUA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marco André Argenta

CURITIBA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE
BIBLIOTECAS/UFPR BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E
TECNOLOGIA

SO729i

Souza, Lucas Peres de

Instabilidade e dimensionamento de pilares de concreto armado de seção poligonal submetidos à flexão composta oblíqua / Lucas Peres de Souza. – Curitiba, 2017.
172 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, 2017.

Orientador: Marco André Argenta.

1. Pilares. 2. Concreto armado. 3. Seção poligonal. I. Universidade Federal do Paraná.
II. Argenta, Marco André. III. Título.

CDD: 624.18341

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUCAS PERES DE SOUZA** intitulada: **INSTABILIDADE E DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO POLIGONAL SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 20 de Outubro de 2017.


MARCO ANDRE ARGENTA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


CARLOS EDUARDO ROSSIGALI

Avaliador Externo (UFPR)


ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UFPR)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar e me dar forças para sempre seguir em frente.

Aos meus pais Alexandre e Alessandra, pelo amor e pelo apoio incondicionais em todas as fases da minha vida.

À Gabriela, por ser uma fonte inesgotável de amor e carinho, por ser meu porto seguro, pela paciência e pela ajuda importantíssima no término desse trabalho.

Aos meus irmãos Mateus, Tiago e Pedro, pela parceria de sempre.

Aos meus amigos, pela preocupação e incentivo durante todo o desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Marco Argenta, pela orientação do trabalho e por todos os conhecimentos passados.

À Universidade Federal do Paraná, por me proporcionar uma educação de qualidade tanto na graduação quanto no mestrado.

Aos engenheiros Diego Capraro e Diogo Capraro, pela oportunidade de trabalho e incentivo durante o mestrado.

RESUMO

Este trabalho visa comparar a resistência à flexão composta oblíqua de pilares de seção quadrada, retangular, cruz, “T” e “L”, considerando a esbeltez do pilar, a instabilidade, a variação do esforço axial e a variação da resistência do concreto para volumes de concreto e aço constantes. Para isso, elaboram-se rotinas computacionais capazes de calcular diagramas momento-normal-curvatura para seções transversais poligonais e de verificar a estabilidade através do cálculo dos esforços de segunda ordem. As rotinas aplicam o Método Geral, associado aos diagramas momento-normal-curvatura e à analogia de Mohr. Além disso, as integrações de tensões sobre as áreas de concreto comprimido são feitas de forma numérica, considerando o diagrama parábola-retângulo da ABNT NBR 6118/2014 e utilizando a equação original, sem linearizações adicionais. Após o processamento dos modelos pelas rotinas, estuda-se quais os efeitos do aumento da esbeltez, da resistência característica do concreto (f_{ck}) e do formato da seção transversal nos diagramas de interação dos pilares. A respeito da influência do índice de esbeltez, percebe-se que as alterações são maiores com o aumento dos esforços de compressão. Já o f_{ck} passa a ter maior interferência na resistência final em pilares sob esforços de compressão mais altos e em pilares mais esbeltos. Na comparação entre o desempenho mecânico das diferentes seções transversais, as seções em formato T e cruz mostraram resistências maiores em relação às seções de formato quadrado, retangular e L.

Palavras-chave: Pilares. Concreto armado. Seções poligonais. Instabilidade.

ABSTRACT

This research aims to compare the strength of square, rectangle, cross, T and L-shape reinforced concrete columns under combined biaxial bending and axial load, considering column slenderness, instability, axial load variation and concrete compressive strength variation, for constant concrete and steel volumes. For this, were developed computer algorithms able to calculate moment-axial load-curvature diagrams for arbitrary polygon shape sections and check the stability by second order effects calculating. The algorithm applies the General Method associated to the moment-axial load-curvature diagrams and to the Mohr's analogy. In addition, the stress integration is done numerically through the Gauss-Legendre quadrature, taking into account the ABNT NBR 6118/2014 parabola-rectangular diagram, without additional linearizations. After the data processing, were studied the impacts of the slenderness increase, of the concrete compressive strength (f_{ck}) and of the section shapes on the columns interaction diagrams. With respect to the slenderness ratio effects, the changes are bigger when the axial load increases. On the other hand, the f_{ck} impacts on the columns' strength are stronger for higher values of axial load and slenderness ratio. About the comparison among section shapes' mechanic performances, the T and the cross shape sections presented higher strengths in relation to the square, rectangular and L shape sections.

Keywords: Columns. Reinforced concrete. Polygon sections. Instability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - INSTABILIDADE NA COMPRESSÃO AXIAL.....	26
FIGURA 2 - BARRA FLETIDA EXAMINADA	27
FIGURA 3 - COMPRIMENTOS DE FLAMBAGEM DE ACORDO COM OS VÍNCULOS DA BARRA.....	30
FIGURA 4 - CURVA DE FLAMBAGEM PARA BARRA COMPOSTA POR MATERIAL QUE APRESENTA LIMITE DE PROPORCIONALIDADE.....	31
FIGURA 5 - LINHA ELÁSTICA SENOIDAL	32
FIGURA 6 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO SIMPLIFICADA DA CURVATURA E O MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO	34
FIGURA 7 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO EXATA DA CURVATURA E O MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO	35
FIGURA 8 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM O MATERIAL EM REGIME NÃO LINEAR.....	36
FIGURA 9 - FLEXÃO COMPOSTA DE BARRAS ESBELTAS NO REGIME ELÁSTICO.....	37
FIGURA 10 - INSTABILIDADE NA FLEXO-COMPRESSÃO COM MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO	38
FIGURA 11 - INSTABILIDADE NA FLEXO-COMPRESSÃO COM MATERIAL EM REGIME NÃO LINEAR	39
FIGURA 12 - CURVATURA NA FLEXÃO SIMPLES	40
FIGURA 13 - CURVATURA E DEFORMAÇÕES NA FLEXO-COMPRESSÃO PARA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO	42
FIGURA 14 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA OBTIDO POR RIBEIRO (2011) PARA $\nu=0,0$	44
FIGURA 15 - EXEMPLO DE AJUSTE DE CURVA POLINOMIAL PARA $\nu=0,5$	45
FIGURA 16 - DIAGRAMA CARGA DESLOCAMENTO PARA PROCESSO DO CARREGAMENTO PROGRESSIVO	48
FIGURA 17 - PROCESSO DO CARREGAMENTO PROGRESSIVO PROPORCIONAL	49

FIGURA 18 - PROCESSO DAS EXCENTRICIDADES PROGRESSIVAS	50
FIGURA 19 - CURVATURAS, ROTAÇÕES E DESLOCAMENTOS NO EIXO DO PILAR.....	51
FIGURA 20 - FLUXOGRAMA DE ALGORITMO QUE GERA DIAGRAMA DE INTERAÇÃO QUE LEVA EM CONTA O ÍNDICE DE ESBELTEZ.....	55
FIGURA 21 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO COM A CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM.....	55
FIGURA 22 - REGIÕES PARA COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS CONSIDERANDO E DESCONSIDERANDO AS FLEXÕES ACOPLADAS	57
FIGURA 23 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA ESQUEMÁTICO, MOSTRANDO A RELAÇÃO ENTRE UMA CURVA CONSTRUÍDA PA $M_{XD} > 0$ E A RETA DA RIGIDEZ SECANTE.....	58
FIGURA 24 - ANALOGIA DE MOHR.....	60
FIGURA 25 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PILAR REAL E NO PILAR ANÁLOGO	61
FIGURA 26 - CURVATURAS E DEFORMAÇÕES DE SEGMENTO INFINITESIMAL SUBMETIDO À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA.....	63
FIGURA 27 - DIVISÃO DA POLIGONAL EM TRAPÉZIOS	69
FIGURA 28 - INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES EM UM TRAPÉZIO GENÉRICO	69
FIGURA 29 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA O DOMÍNIO GLOBAL (X,Y) PARA O DOMÍNIO LOCAL (ξ,η)	70
FIGURA 30 - FLUXOGRAMA GERAL PARA CUMPRIMENTO DOS OBJETIVOS DO TRABALHO.....	72
FIGURA 31 - FORMATOS DE SEÇÃO TRANSVERSAL AVALIADOS.	73
FIGURA 32 - PILARES PADRÃO DE SEÇÃO QUADRADA	74
FIGURA 33 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO IDEALIZADO PARA O CONCRETO COMPRIMIDO	80
FIGURA 34 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA AÇO DAS ARMADURAS PASSIVAS.....	80
FIGURA 35 - INTERSECÇÃO DE POLÍGONOS PELO MÓDULO SHAPELY, DE GILLIES (2017).....	84

FIGURA 36- TRIÂNGULO-RETÂNGULO PADRÃO.....	87
FIGURA 37- TRIÂNGULO GENÉRICO	88
FIGURA 38 - FLUXOGRAMA GERAL DA ROTINA DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE.....	92
FIGURA 39 - SOLICITAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM NO PILAR.	93
FIGURA 40 - CONVENÇÃO DE SINAIS PARA OS MOMENTOS FLETORES NO PILA.	94
FIGURA 41- FLUXOGRAMA DO PASSO ADAPTATIVO PARA CÁLCULO DA MÁXIMA EXCENTRICIDADE DE PRIMEIRA ORDEM	95
FIGURA 42 - FLUXOGRAMA DE CÁLCULO DOS ESFORÇOS DE 2ª ORDEM.....	96
FIGURA 43 - DIAGRAMAS DE CURVATURA EM TORNO DOS EIXOS X E Y	97
FIGURA 44 - SEÇÃO POLIGONAL EM L PARA VALIDAÇÃO DO CÓDIGO.....	102
FIGURA 45 - COMPARAÇÃO COM RESULTADO DE CECCON (2008)	103
FIGURA 46 - CONFIGURAÇÃO DE ARMADURA E FORMULAÇÕES LEVADAS EM CONTA POR TORRICO (2011)	103
FIGURA 47 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE TORRICO (2010) PARA PILARES COM $\lambda=100$	104
FIGURA 48 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE TORRICO (2010) PARA PILARES COM $\lambda=150$	104
FIGURA 49 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$	106
FIGURA 50 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,5$	107
FIGURA 51 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=1,1$	107
FIGURA 52 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,1$	108
FIGURA 53 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,4$	108

FIGURA 54 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,9$	109
FIGURA 55 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=400$ kN ...	109
FIGURA 56 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=1000$ kN .	110
FIGURA 57 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=1800$ kN .	110
FIGURA 58 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=400$ kN	111
FIGURA 59 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=700$ kN	111
FIGURA 60 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=1000$ kN	112
FIGURA 61 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=200$ kN	113
FIGURA 62 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1000$ kN	113
FIGURA 63 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1800$ kN	114
FIGURA 64 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=100$ e $N=200$ kN	115
FIGURA 65 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=100$ e $N=1000$ Kn	115
FIGURA 66 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=500$ kN	116
FIGURA 67 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1000$ kN	117
FIGURA 68 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=2600$ kN	117
FIGURA 69 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=100$ e $N=500$ kN	118
FIGURA 70 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=100$ e $N=1000$ kN	118
FIGURA 71 - DISTÂNCIA ENTRE POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA LINHA NEUTRA E O CENTRO DE GRAVIDADE DA SEÇÃO TRANSVERSAL EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$	120
FIGURA 72 - CURVATURAS MÁXIMAS EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA E f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$	121
FIGURA 73 - DISTÂNCIA ENTRE POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA LINHA NEUTRA E O CENTRO DE GRAVIDADE DA SEÇÃO TRANSVERSAL EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=1,1$	121
FIGURA 74 - CURVATURAS MÁXIMAS EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA E f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$	122

FIGURA 75 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES QUADRADAS COM $N=400$ kN E INCLINAÇÃO α DA LINHA NEUTRA IGUAL A ZERO	123
FIGURA 76 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES QUADRADAS COM $N=1800$ kN E INCLINAÇÃO α DA LINHA NEUTRA IGUAL A ZERO	124
FIGURA 77 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa SUBMETIDOS A $N=200$ kN e $\alpha=90^\circ$	125
FIGURA 78 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa SUBMETIDOS A $N=1000$ kN e $\alpha=90^\circ$	126
FIGURA 79 - DIFERENÇA ENTRE ÂNGULOS θ E α PARA SEÇÕES QUE APRESENTAM ASSIMETRIA	127
FIGURA 80 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=0$)	134
FIGURA 81 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=50$)	135
FIGURA 82 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=100$)	136
FIGURA 83 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=200$)	137
Figura 84 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=0$)	138
FIGURA 85 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=50$)	139
FIGURA 86 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=100$)	140
FIGURA 87 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=200$)	141
FIGURA 88 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=0$)	142
FIGURA 89 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)	143
FIGURA 90 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)	144

FIGURA 91 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPA E $\lambda=200$)	145
FIGURA 92 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R0 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPA E $\lambda=0$)	146
FIGURA 93 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPA E $\lambda=50$)	147
FIGURA 94 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPA E $\lambda=50$)	147
FIGURA 95 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R2 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPA E $\lambda=100$)	148
FIGURA 96 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R3 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPA E $\lambda=200$)	148
FIGURA 97 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R0 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPA E $\lambda=0$)	149
FIGURA 98 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPA E $\lambda=50$)	150
FIGURA 99 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R2 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPA E $\lambda=100$)	150
FIGURA 100 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R3 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPA E $\lambda=200$)	151
FIGURA 101 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C0 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPA E $\lambda=0$)	152
FIGURA 102 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C1 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPA E $\lambda=50$)	153
FIGURA 103 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C2 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPA E $\lambda=100$)	154
FIGURA 104 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C3 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPA E $\lambda=200$)	155
FIGURA 105 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C0 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPA E $\lambda=0$)	156
FIGURA 106 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C1 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPA E $\lambda=50$)	157
FIGURA 107 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C2 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPA E $\lambda=100$)	158

FIGURA 108 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C3 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPA E $\lambda=200$)	159
FIGURA 109 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T0 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPA E $\lambda=0$)	160
FIGURA 110 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T1 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPA E $\lambda=50$)	161
FIGURA 111 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T2 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPA E $\lambda=100$)	162
FIGURA 112 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T3 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPA E $\lambda=200$)	163
FIGURA 113 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T0 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPA E $\lambda=0$)	164
FIGURA 114 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T1 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPA E $\lambda=50$)	165
FIGURA 115 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T2 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPA E $\lambda=100$)	166
FIGURA 116 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T3 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPA E $\lambda=200$)	166
FIGURA 117 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L0 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPA E $\lambda=0$)	167
FIGURA 118 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L1 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPA E $\lambda=50$)	168
FIGURA 119 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L2 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPA E $\lambda=100$)	169
FIGURA 120 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L3 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPA E $\lambda=200$)	170
FIGURA 121 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L0 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPA E $\lambda=0$)	171
FIGURA 122 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L1 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPA E $\lambda=50$)	172
FIGURA 123 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L2 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPA E $\lambda=100$)	173
FIGURA 124 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L3 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPA E $\lambda=200$)	174

LISTA DE SÍMBOLOS

$(1/r)_{inf}$ - máximo valor de curvatura que não apresentou ruptura, dentre todos os que foram testados até a iteração k . Caso todos os valores testados tenham levado à ruptura, $(1/r)_{inf}=0$

$(1/r)_{sup}$ - mínimo valor de curvatura que apresentou ruptura, dentre todos os que foram testados até a iteração k

$(1/r)_{y,j}$ - curvatura em torno de y da seção j

$(1/r)_{y,j+1}$ - curvatura em torno de y da seção $j+1$

(ξ_i, η_i) - pontos de Gauss

$[pol_1]$ - matriz com coordenadas dos vértices da seção transversal rotacionadas para ângulo α

$[pol_2]$ - matriz com coordenadas dos vértices de polígono de lados de tamanho infinito, cuja aresta inferior coincide com a coordenada $y_{\alpha LN}$ da linha neutra

$[tri]_t$ - matriz que contém as coordenadas do triângulo “ t ” da malha gerada

$\{pol_{intersec}\}$ - lista com matrizes que contém as coordenadas dos vértices das poligonais comprimidas

$\{tri\}$ - vetor que contém as matrizes com as coordenadas dos triângulos gerados pela malha

$\{\alpha\}$ - vetor com todas as inclinações de linha neutra que farão parte do cálculo dos esforços resistentes

$\{v\}$ - vetor com todos os valores de esforço normal adimensional aplicados à seção transversal

A_c - área de concreto da seção transversal

$A_{pol,i}$ - área da i -ésima poligonal comprimida

A_s - área de aço da seção

A_{sb} - área da seção transversal da b-ésima barra de aço

$A_{tri,t}$ - área do t-ésimo triângulo da malha gerada

A_{Tst} - área do triângulo padrão

$A_{\phi l}$ - área de 1 barra longitudinal da seção

b_x - dimensão menor da seção paralela a x

b_y - dimensão menor da seção paralela a y

e_1 - excentricidade de primeira ordem

e_k - excentricidade de primeira ordem testada na iteração k

e_{k+1} - excentricidade de primeira ordem a ser testada na iteração k+1

e_{kinf} - máximo valor de excentricidade testado até a iteração k que não levou à ruptura

e_{ksup} - mínimo valor de excentricidade testado até a iteração k que levou à ruptura

E_s - módulo de elasticidade longitudinal do aço, adotado igual a 210 GPa

f_{cd} - resistência de cálculo à compressão do concreto

f_{ck} - resistência característica à compressão do concreto

f_{yd} - valor de cálculo da tensão de escoamento do aço, correspondente à divisão de f_{yk} por coeficiente redutor γ_s . Nas análises realizadas, γ_s é igual a 1,15

f_{yk} - valor característico da tensão de escoamento do aço (para o aço CA-50, utilizado nos cálculos, o valor é de 500 MPa)

$g(\xi, \eta)$ - função qualquer a ser integrada sobre a área do triângulo padrão

H_x - dimensão maior da seção paralela a x

H_x ; dimensão da seção paralela a x

H_y - dimensão maior da seção paralela a y

I - contador dos pontos de Gauss

I - integral da função $f(x_\alpha, y_\alpha)$ sobre a área do triângulo qualquer

$J(\xi, \eta)$ - matriz jacobiana de interpolação das coordenadas (x_α, y_α) no domínio (ξ, η)

L - comprimento total do pilar

l_j - comprimento de cada trecho do pilar

M_{1x} - momento fletor de primeira ordem em torno do eixo x

M_{1xj}, M_{1yj} - momentos fletores de primeira ordem da j-ésima seção

M_{1y} - momento fletor de primeira ordem em torno do eixo y

M_{2x}, M_{2y} - momentos máximos de segunda ordem do pilar

M_{2xj}, M_{2yj} - momentos de segunda ordem da j-ésima seção

m_j - “momento fletor” na seção j, correspondente ao deslocamento transversal δ_{xj} no pilar original

M_{srd} - momento fletor resistido pelo conjunto de barras de aço da seção transversal

M_{xjr}, M_{yjr} - momentos fletores da j-ésima seção na iteração r

n - coeficiente do diagrama parábola-retângulo que depende do valor de f_{ck}

N - esforço normal aplicado à seção

N_1, N_2, N_3 - funções de forma nodais utilizadas para interpolação linear das coordenadas

n_b - número de barras da seção transversal

N_{pg} - número de pontos de Gauss

n_{pol} - número de áreas poligonais comprimidas geradas pela intersecção entre pol_1 e pol_2

n_{sec} - número de seções do pilar

N_{srd} - esforço normal resistido pelo conjunto de barras de aço da seção transversal

n_{tri} - número de triângulos gerados pela malha aplicada sobre a área poligonal;

n_{vert} - número de vértices da seção transversal

n_{α} - número de valores de inclinação de linha neutra entre 0 e 2π , tomado como igual a 721 para todas as seções transversais, de maneira que se obtenham diagramas momento-curvatura para cada intervalo de $0,5^\circ$

n_v - número de incrementos de esforço normal adimensional, admitido como 20 em todas as seções transversais

Q - “resultante total de carregamentos” aplicados ao longo de todo o pilar

q_j - “resultante de carregamento” no trecho j , entre a seção j e a seção $j+1$

$R_{(z=0)}$ - “reação de apoio” em $z=0$

$R_{(z=L)}$ - “reação de apoio” em $z=L$

R_{cd} - valor da resultante de compressão no concreto

R_{sb} - resultante axial da b -ésima barra de aço

V_c - volume de concreto do pilar

V_s - volume de aço do pilar

w_i - pesos de Gauss

$x_{\alpha cg}, y_{\alpha cg}$ - coordenadas x_{α}, y_{α} do centroide da seção transversal

$y_{\alpha, Rcd}$ - ponto de aplicação de R_{cd}

$y_{\alpha b}$ - coordenada y_{α} do centroide da b-ésima barra de aço

z_j - coordenada z da seção j

z_{qj} - coordenada z do ponto de aplicação do “carregamento” q_j ;

Δe_k - variação entre excentricidades de 2 iterações consecutivas

Δv - incremento discreto de esforço normal adimensional

ε_s - deformação axial da barra de aço

ε_{su} - deformação axial máxima suportada pelo aço da barra, com valor igual a 1,0%

θ - ângulo formado entre o eixo x e o vetor resultante M_1

(ξ, η) - domínio local do triângulo padrão

$\Delta \alpha$ - incremento discreto do ângulo α

$\Delta \delta_{\max}$ - variação máxima de deslocamentos para que o processo iterativo pare

$\Delta \delta_r$ - variação de deslocamentos máxima da iteração r entre todas as seções

$\Delta \delta_{xjr}, \Delta \delta_{yjr}$ - variação de deslocamentos transversais da j-ésima seção do pilar, entre as iterações (r-1) e r

δ_{xj} - deslocamento transversal paralelo a x na seção j do pilar original

$\delta_{xj,r-1}, \delta_{yj,r-1}$ - deslocamentos transversais da j-ésima seção na iteração r-1

$\delta_{xjr}, \delta_{yjr}$ - deslocamentos transversais da j-ésima seção do pilar na r-ésima iteração

ε_c - deformação do concreto comprimido em um ponto qualquer

ε_{c2} - deformação do concreto comprimido a partir da qual a equação da tensão σ_c deixa de ser uma equação polinomial n e passa a ter um valor constante

ε_{cu} - deformação última suportada pelo concreto comprimido, a partir da qual ocorre a ruptura por encurtamento excessivo

ε_{sb} - deformação da b-ésima barra de aço

ε_{se} - deformação de escoamento do aço da barra

ε_{su} - deformação última do aço da barra

γ_c - coeficiente redutor de resistência do concreto, adotado com valor igual a 1,4 em todas as análises

λ - índice de esbeltez do pilar

v_{max} - valor do esforço normal adimensional máximo aplicado na seção transversal, admitido como igual a 2,0 em todas as seções transversais

v - esforço normal adimensional

σ_c - tensão no concreto para a fibra cuja deformação é ε_c

σ_{sb} - tensão axial de tração ou compressão na b-ésima barra de aço

ζ_{qj} - coordenada local em cada trecho j , para o ponto de aplicação do “carregamento” q_j , variando de 0 a l_j

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	23
1.1. HIPÓTESE	24
1.2. OBJETIVOS	24
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	25
2.1. FUNDAMENTOS DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS RETICULADAS	25
2.1.1. Barras de Euler	25
2.1.2. Estabilidade da configuração fletida de equilíbrio	31
2.2. DIAGRAMAS MOMENTO FLETOR-FORÇA NORMAL-CURVATURA PARA SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO	39
2.3. MÉTODOS DE ANÁLISE DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA LOCAL EM PILARES DE CONCRETO ARMADO.....	46
2.3.1. Método Geral	47
2.3.2. Analogia de Mohr.....	58
2.4. CÁLCULO DE ESFORÇOS RESISTENTES EM SEÇÕES POLIGONAIS SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA	61
2.4.1. Deformações na flexão composta oblíqua	62
2.4.2. Cálculo das contribuições resistentes	65
2. MÉTODOS.....	72
2.1. DADOS DE ENTRADA DOS MODELOS	72
2.2. DIAGRAMAS MOMENTO-NORMAL-CURVATURA	77
2.2.1. Valores de esforço normal adimensional e inclinação de linha neutra	77
2.2.2. Leis constitutivas dos materiais.....	78
2.4.3. Processo de convergência para encontrar curvatura máxima.....	81
2.4.4. Geração do diagrama momento-curvatura	82
2.4.5. Processo iterativo para encontrar posição de equilíbrio da linha neutra .	82
2.2.1. Cálculo de esforços no concreto comprimido	83
2.2.1.1. Obtenção das coordenadas das poligonais comprimidas	83
2.2.2. Cálculo de esforços nas barras de aço	90
2.5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE	92
2.5.1. Dados de entrada	92
2.5.2. Esforços de primeira ordem	93
2.5.3. Cálculo da máxima excentricidade de primeira ordem	95
2.5.4. Esforços de segunda ordem.....	96
2.6. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO	102
2.6.1. EXEMPLO 1	102
2.6.2. EXEMPLO 2	103
3. RESULTADOS	106

3.1.	INFLUÊNCIA DO ÍNDICE DE ESBELTEZ	106
3.2.	INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO	109
3.3.	INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL	112
4.	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	119
4.1.	INFLUÊNCIA DO ÍNDICE DE ESBELTEZ	119
4.2.	INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO	122
4.3.	INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL	124
5.	CONCLUSÕES	129
6.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	131
	REFERÊNCIAS	132
	APÊNDICE A - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO QUADRADA.....	134
	APÊNDICE B - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO RETANGULAR	146
	APÊNDICE C - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO EM CRUZ	152
	APÊNDICE D - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO EM “T”.....	160
	APÊNDICE E - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO EM “L”	167

INTRODUÇÃO

Seções transversais sujeitas à flexão composta são recorrentes em estruturas de concreto. Geralmente, situações como pilares localizados em cantos de edificações, ou mesmo suportando diretamente lajes bidirecionais, levam a tais tipos de solicitação (PALLARÉS *et al*, 2009). Objetivamente, sempre que, com a aplicação simultânea de uma carga axial e um momento fletor, a direção do plano de flexão não coincidir com um eixo de simetria da seção, ocorrerá flexão composta oblíqua (CADAMURO JÚNIOR, 1997).

O tipo de solicitação descrita acima é frequente em pilares de concreto armado. Entretanto, para as condições de contorno a que um pilar é geralmente submetido, além da flexão composta oblíqua, o fenômeno de instabilidade também é comum. Assim, estes eventos tornam o estudo destas peças complexo, principalmente pelo comportamento não linear, que é bastante influente nas respostas mecânicas.

As não-linearidades do dimensionamento de pilares são originárias de duas vertentes principais: a não-linearidade física (NLF) e a não-linearidade geométrica (NLG). Fisicamente, os materiais que compõem os pilares (aço e concreto) possuem leis constitutivas que fogem das regras de proporcionalidade. Quanto à NLG, ela é proveniente do efeito gerado pela deslocabilidade transversal, provocada pela flexão, em conjunto com o carregamento axial. Este efeito acontece porque estas flechas transversais geram novos esforços devido ao acréscimo de excentricidade de atuação ao esforço axial resultante. Com isto, os deslocamentos serão ainda maiores e o processo é iterativo. Cabe à análise de estabilidade determinar se o processo é convergente (equilíbrio é estável) ou não.

Soma-se a isso o fato de que os formatos das seções transversais tendem a ser cada vez mais variados, para que a compatibilização com os layouts arquitetônicos seja possível. Ainda, o dimensionamento de peças bastante esbeltas, com materiais mais resistentes, começa a ser mais exigido por causa de imposições funcionais e estéticas.

Nessa direção, o presente estudo abrange a análise de pilares com seções de formato poligonal variado, com a influência da NLG e NLF, avaliando

o comportamento mecânico das peças para concretos comuns e de alta resistência.

1.1. HIPÓTESE

Assume-se como hipótese que pode haver influência significativa da resistência do concreto e da forma da seção na resistência à flexão composta oblíqua de pilares esbeltos de concreto armado.

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal comparar a resistência à flexão composta oblíqua de pilares de seção quadrada, retangular, cruz, “T” e “L”, considerando a esbeltez do pilar, a instabilidade, a variação do esforço axial e a variação da resistência do concreto para volumes de concreto e aço constantes.

Como objetivos específicos, têm-se:

- a) elaborar rotina computacional capaz de calcular diagramas momento-normal-curvatura para seções transversais poligonais;
- b) elaborar rotina computacional que verifique a estabilidade e calcule os esforços de segunda ordem em pilares esbeltos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O dimensionamento de pilares de concreto armado deve considerar três tópicos principais: a análise de estabilidade, a construção de diagramas momento-normal-curvatura e o cálculo de esforços resistentes na seção transversal. Nessa direção, os tópicos a seguir esclarecerão os conceitos básicos dos temas referidos por meio de estudos recentes trazidos pela literatura científica.

2.1. FUNDAMENTOS DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Existem alguns estados-limite ou condições para as quais uma estrutura pode falhar: ao atingir a tensão de escoamento ou a tensão última do material; ao exceder deslocamentos máximos ou ao atingir uma configuração instável.

A instabilidade caracteriza-se por ser um estado-limite em que há uma limitação no desenvolvimento da capacidade resistente da peça (RILEY, 2003). Um estado de equilíbrio instável é definido como aquele em que, sob o efeito de uma perturbação infinitesimal qualquer, têm-se uma súbita mudança no sistema. Esta alteração brusca pode ser na maneira como a estrutura se deforma ou por altos valores de deslocamento. Pode-se pensar também, para exemplificar um sistema instável, em uma esfera colocada cuidadosamente no topo de um relevo. Qualquer perturbação imposta, por menor que seja, fará com que a esfera role para baixo, sem que volte ao topo (JONES, 2006).

Para a ABNT NBR 6118/2014, o estado-limite último de instabilidade em estruturas de concreto armado é alcançado toda vez que, ao aumentar a intensidade do carregamento e, conseqüentemente, das deformações, a capacidade resistente passa a ser inferior ao aumento da solicitação.

2.1.1. Barras de Euler

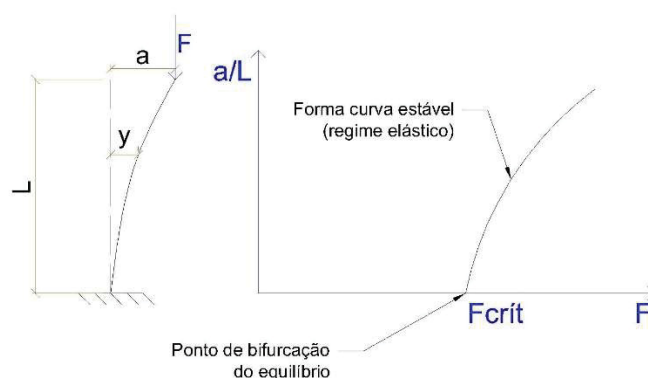
Considerando barras comprimidas axialmente, verifica-se de modo experimental que, sob a ação de carregamentos crescentes, é possível atingir um estado limite no qual a forma reta inicial passa a ser instável. A carga correspondente a este estado limite é chamada de carga crítica ou carga de flambagem (FUSCO, 1981).

Se o carregamento axial aplicado à barra é menor que o valor crítico, a mesma permanece com sua forma reta inicial e fica submetida apenas à compressão axial. Neste caso, a forma reta é estável, ou seja, caso uma força transversal seja aplicada e provoque uma pequena deflexão, o deslocamento desaparece quando a mesma força lateral é retirada do sistema. Contudo, se a carga axial é gradualmente aumentada até o valor crítico, chega-se a uma condição em que a forma reta inicial da barra torna-se instável e uma pequena força transversal provocará deslocamentos que não desaparecerão quando a força lateral for removida (TIMOSHENKO, 1963).

A carga crítica é, então, o carregamento para o qual o estado de equilíbrio corrente de uma estrutura muda repentinamente de estável para instável. Geralmente, sob a ação da carga crítica, define-se que um elemento estrutural sofre flambagem, não mais se deformando segundo seu estado de equilíbrio original. Este fenômeno de súbita mudança na forma de equilíbrio é chamado bifurcação, pois realmente há uma bifurcação entre dois campos diferentes ou formas de equilíbrio (JONES, 2006).

O fenômeno de instabilidade de barras retas comprimidas axialmente pode apresentar pontos de bifurcação de equilíbrio conforme definido anteriormente e pode ser mostrado em um diagrama (FIGURA 1) que relacione a carga F aplicada e o máximo deslocamento transversal desta barra (FUSCO, 1981).

FIGURA 1 - INSTABILIDADE NA COMPRESSÃO AXIAL



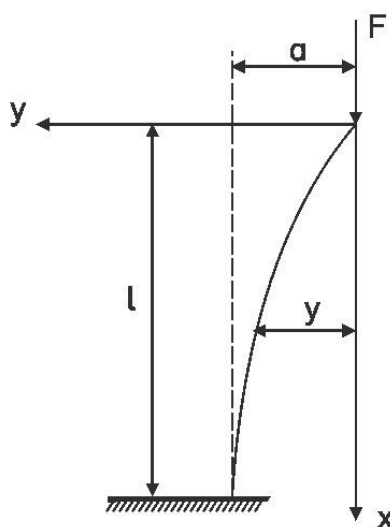
FONTE: Adaptado de FUSCO (1981).

A solução fundamental do problema de flambagem de barras foi desenvolvida por Leonhard Euler (1707-1783) e considera uma barra esbelta, idealizada inicialmente como perfeitamente retilínea. Tal solução verifica a

tendência da barra de voltar à sua condição inicial após ter sido retirada de sua configuração retilínea, ou seja, investiga a estabilidade do equilíbrio, na forma reta, de maneira a encontrar a carga crítica de flambagem e conhecer a forma que a barra assumirá no equilíbrio pós-crítico.

A barra, quando submetida a cargas com valor abaixo da carga crítica, possui somente deformações na direção axial, sem apresentar deslocamentos transversais $y(z)$. No entanto, o que se deseja é examinar o equilíbrio da barra na forma fletida na FIGURA 2 para saber se este estado fletido é ou não estável:

FIGURA 2 - BARRA FLETIDA EXAMINADA



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

A rigor, para determinar os deslocamentos desta barra para cargas superiores ao valor crítico, deve-se aplicar a expressão exata da equação diferencial da linha elástica, disposta na Equação (1).

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{M}{E * I} \quad \text{Equação (1)}$$

Onde:

r: Raio de curvatura da barra;
E: Módulo de elasticidade da barra;
I: Inércia da seção transversal da barra no entorno do eixo de flexão;
M: Momento fletor solicitante, calculado pela Equação (2).

$$M = F * y \quad \text{Equação (2)}$$

Onde:

y: Deslocamento transversal do eixo da barra;
F: Carregamento axial aplicado na barra.

Caso a forma linearizada explicitada na Equação (4) seja utilizada no lugar da Equação (1), é possível determinar os valores da carga crítica. Apesar disso, as flechas da configuração fletida continuarão indeterminadas.

Então, assumindo pela Equação (3) que:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 0 \quad \text{Equação (3)}$$

A Equação (1) transforma-se na Equação (4):

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dz^2} = \mp \frac{M}{E * I} \quad \text{Equação (4)}$$

E, substituindo a Equação (2) na Equação (4), chega-se à Equação (5), onde a constante k é calculada pela Equação (6).

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 * y = 0 \quad \text{Equação (5)}$$

$$k^2 = \frac{F}{E * I} \quad \text{Equação (6)}$$

A solução da Equação (5) é, então, dada por:

$$y = C_1 * \text{sen}(k * z) + C_2 * \cos(k * z) \quad \text{Equação (7)}$$

Onde:

C₁ e C₂: Constantes de integração que dependem das condições de contorno impostas à barra.

Para a barra estudada, engastada em z=L e livre em z=0, as condições de contorno são dadas pela Equação (8) e pela Equação (9).

$$y(z = 0) = 0, \text{ logo } C_2 = 0 \quad \text{Equação (8)}$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=L} = 0, \text{ logo } C_1 * k * \cos(k * L) = 0 \quad \text{Equação (9)}$$

Desta maneira, para ter a solução não trivial (com C_1 diferente de zero), têm-se, pela Equação (10), que:

$$\cos(k * L) = 0 \quad \text{Equação (10)}$$

Assim, o valor de $k*L$ precisa assumir os valores mostrados na Equação (11) para satisfazer a Equação (10). Dessa maneira, o valor da força crítica particularizada para $n=1$ (primeiro modo de flambagem) pode ser escrita pela Equação (12).

$$k * L = (2n - 1) * \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad \text{Equação (11)}$$

$$F_{crit} = \pi^2 * \frac{EI}{4 * L^2} \quad \text{Equação (12)}$$

Ou, em uma disposição geral:

$$F_{crit} = \pi^2 * \frac{EI}{L_e^2} \quad \text{Equação (13)}$$

Onde:

L_e : Comprimento de flambagem da barra, que varia conforme as condições de contorno impostas às extremidades;

F_{crit} : Carregamento axial crítico de flambagem para a barra comprimida.

Como a fórmula de Euler foi desenvolvida para o caso de uma coluna com extremidades presas por pinos ou livres para girar, L_e representa a distância sem apoio entre os pontos de momento fletor nulo. Se a coluna for apoiada de outras formas, a Equação (13) também poderá ser usada, desde que L_e represente a distância entre pontos de momento nulo, como mostrado pela FIGURA 3.

Vale ressaltar que as hipóteses adotadas por Euler admitem um comportamento elástico linear para o material que compõe a barra. Portanto, esta linha de raciocínio será válida somente se a tensão crítica de compressão não ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, como mostra a Equação (14) (FUSCO, 1981).

$$\sigma_{crit} = \pi^2 * \frac{E}{\lambda^2} \leq f_0 \quad \text{Equação (14)}$$

$$\lambda = \frac{L_e}{i} \quad \text{Equação (15)}$$

Onde:

L_e : Comprimento de flambagem da barra, que varia conforme as condições de contorno impostas às extremidades (FIGURA 3);

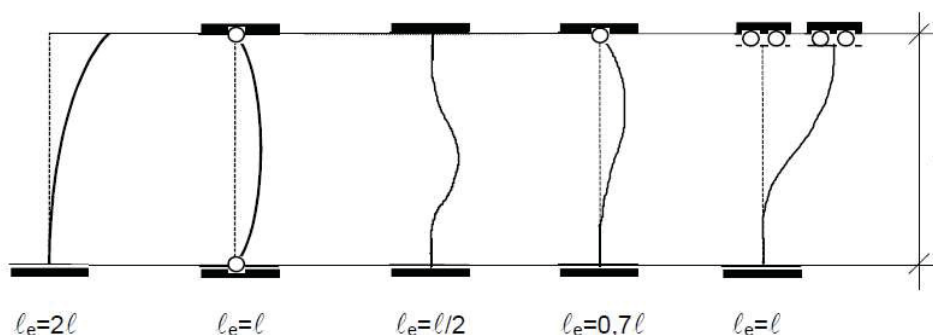
σ_{crit} : Tensão crítica de compressão na seção transversal;

λ : Parâmetro de esbeltez da barra;

i : Raio de giração da seção transversal da barra segundo o eixo de flexão;

f_0 : Tensão que limita o ramo elástico do material da barra comprimida.

FIGURA 3 - COMPRIMENTOS DE FLAMBAGEM DE ACORDO COM OS VÍNCULOS DA BARRA



FONTE: BORGES (1999).

Quando $\sigma_{crit}=f_0$, o valor do parâmetro de esbeltez passa a assumir o valor da Equação (16):

$$\lambda = \lambda_{lim} = \sqrt{\pi^2 * \frac{E}{f_0}} \quad \text{Equação (16)}$$

Onde:

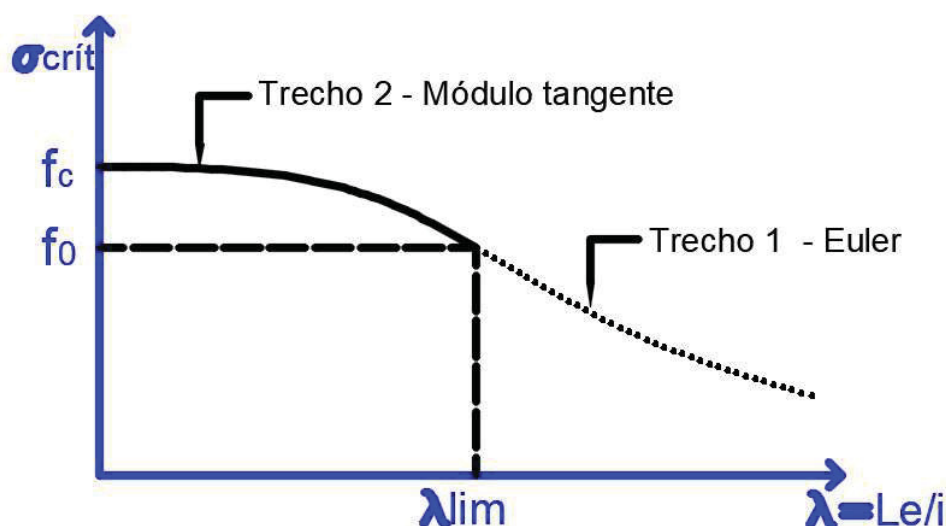
λ_{lim} : Parâmetro de esbeltez limite para que a instabilidade ocorra no ramo elástico do material da barra.

Então, para utilizar a Equação (13), a esbeltez da barra deve ser maior que λ_{lim} , garantindo que a flambagem ocorrerá ainda no regime elástico. Se a esbeltez for inferior a λ_{lim} , a tensão crítica será maior que f_0 e, para utilizar a Equação (13), o módulo de elasticidade a ser aplicado deverá ser o módulo tangente, assim como mostra a FIGURA 4.

Existe ainda a possibilidade de ocorrência de flambagem com tensões maiores que o limite de proporcionalidade, mas essa constatação não altera a natureza do fenômeno de mudança da forma de equilíbrio. No entanto, a partir do momento em que não há mais a elasticidade linear do material, a mudança da forma de equilíbrio pode gerar um comportamento simétrico instável que depende do comportamento não linear do material.

Como mostrado na FIGURA 4, a fórmula de Euler pode ser aplicada se a flambagem ocorrer no trecho 1, onde a esbeltez da coluna é maior que a esbeltez limite. Caso a flambagem ocorra no trecho 2, o módulo de elasticidade linear “E” da Equação (13) tem de ser substituído pelo módulo tangente, correspondente ao trecho em que o material se deforma de maneira não linear.

FIGURA 4 - CURVA DE FLAMBAGEM PARA BARRA COMPOSTA POR MATERIAL QUE APRESENTA LIMITE DE PROPORCIONALIDADE



FONTE: Adaptado de FUSCO (1981).

2.1.2. Estabilidade da configuração fletida de equilíbrio

Uma barra fletida responde à solicitação de momento externo mostrada na Equação (17) com um momento interno restaurador representado na Equação (18), fruto de sua rigidez à flexão. Sendo assim, se o momento restaurador exceder o momento externo perturbador do equilíbrio, a barra retornará ao seu estado retilíneo original. Por outro lado, se o carregamento externo for suficiente para superar o momento interno resistente, a peça comprimida se torna instável e flamba (JONES, 2006).

$$M_{ext} = F * y \quad \text{Equação (17)}$$

$$M_{int} = \frac{1}{r} * E * I \quad \text{Equação (18)}$$

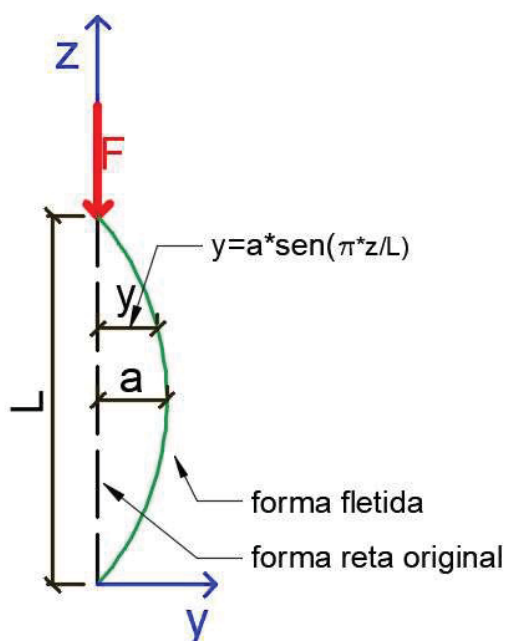
Onde:

M_{ext} : Momentos fletores externos atuantes ao longo da barra;

M_{int} : Momentos fletores internos resistentes em cada seção da barra.

Assim, é possível avaliar se a configuração pós crítica de uma determinada barra é estável ou não por meio da análise do equilíbrio entre momentos externos solicitantes e momentos internos resistentes. Para determinar a estabilidade do equilíbrio admite-se, por exemplo, que a linha elástica da situação fletida possui uma forma senoidal, como na FIGURA 5 e na Equação (19). Todo o referencial teórico deste tópico para a análise de estabilidade de barras fletidas é colocado conforme disposto em Fusco (1981).

FIGURA 5 - LINHA ELÁSTICA SENOIDAL



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

$$y = a * \text{sen}\left(\frac{\pi}{L} * z\right) \quad \text{Equação (19)}$$

Onde:

a: flecha transversal máxima ao longo do comprimento da barra na configuração fletida.

Quando se considera a equação da curvatura aproximada, há uma proporcionalidade entre a curvatura e os deslocamentos transversais, como demonstrado pela Equação (20). Já quando os termos de segunda ordem são levados em conta na expressão da curvatura, esta proporcionalidade não ocorre, assim como na Equação (21) .

$$y = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 * \frac{1}{r} = C * \frac{1}{r} \quad \text{Equação (20)}$$

$$\frac{1}{r} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 * \frac{y}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 * (a^2 - y^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Equação (21)}$$

Em uma análise de estabilidade na qual os mecanismos de flexão são preponderantes, as funções que regem os momentos externos e os momentos internos devem necessariamente se cruzar em algum ponto para que o equilíbrio ocorra, assim como mostra a Equação (22). Este pressuposto possibilita o estudo de algumas situações específicas que podem ocorrer com a barra fletida. Tais situações podem variar com os esforços solicitantes de primeira ordem, com o tipo de resposta do material e com a equação adotada para a curvatura das seções transversais da peça.

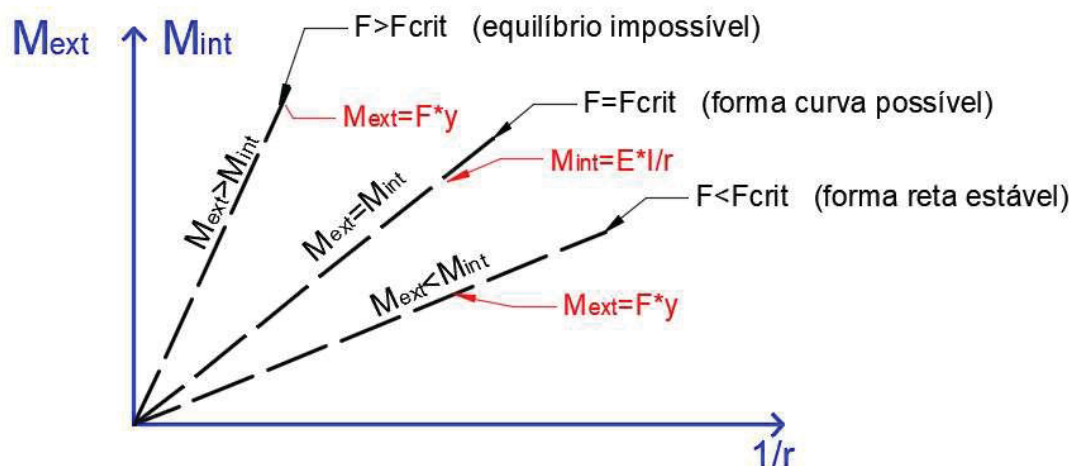
$$M_{int} = M_{ext} \quad \text{Equação (22)}$$

A primeira hipótese a ser estudada é a de uma barra submetida à compressão centrada, em que a flambagem ocorra com o material ainda no regime linear e a curvatura seja aproximada.

Neste caso, porém, a determinação da estabilidade do equilíbrio pós crítico é impossível, porque as flechas transversais ficam indeterminadas, conforme indicado na Equação (23) e ilustrado pela FIGURA 6.

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 * y * EI = F * y \quad \text{Equação (23)}$$

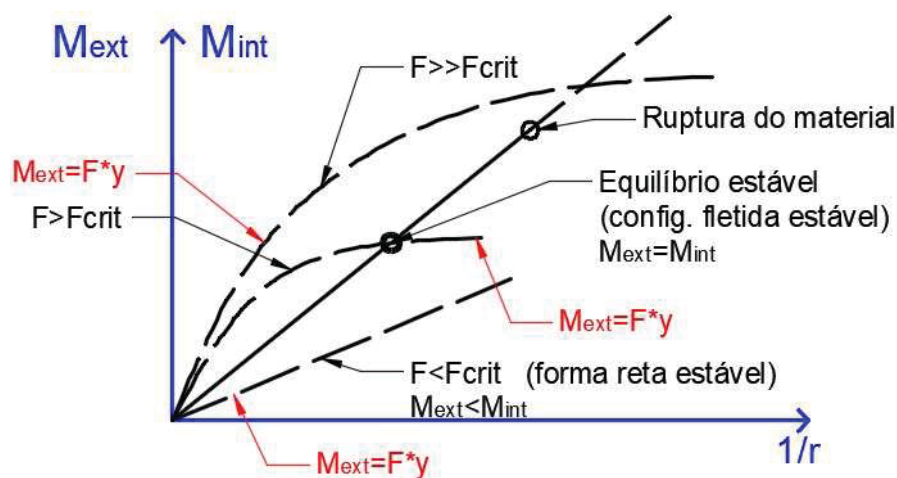
FIGURA 6 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO SIMPLIFICADA DA CURVATURA E O MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Por outro lado, pode-se tomar a mesma barra, comprimida de forma centrada, com o material ainda em um regime linear, mas aplicando a expressão completa da curvatura, mostrada na Equação (21). Nesse caso, o momento externo passa a ser uma função não linear da curvatura, enquanto o momento interno continua sendo uma função linear da curvatura, como demonstra a FIGURA 7. A linearidade da função que rege o momento interno garante que haja um ponto de cruzamento entre ela e a função do momento externo. Conclui-se nesta situação que a configuração fletida será sempre estável, desde que não aconteça a ruptura do material.

FIGURA 7 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO EXATA DA CURVATURA E O MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO

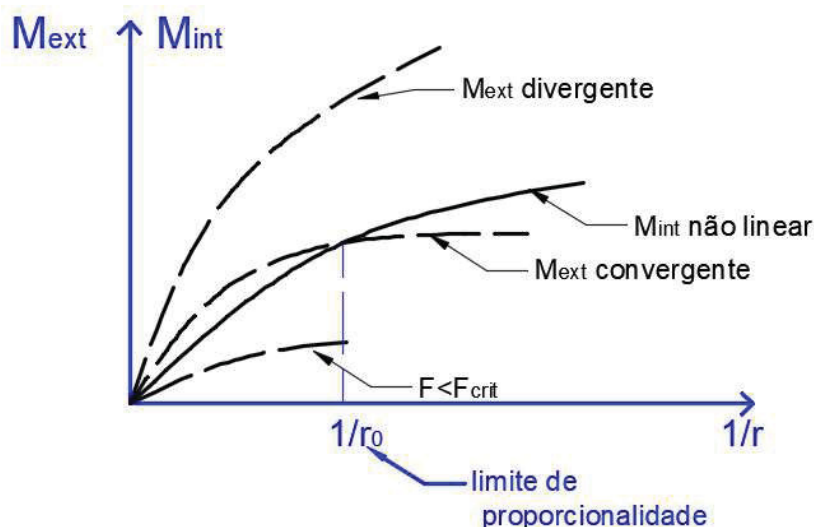


FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Ainda para barras submetidas à compressão centrada, existe a possibilidade da peça possuir uma bifurcação do equilíbrio com o material em um regime anelástico, como mostra a FIGURA 8. Neste caso, a equação do momento interno em função da curvatura não será mais linear. Haverá, então, duas possibilidades:

- $M_{int}(1/r)$ convergir para a curva $M_{ext}(1/r)$, possibilitando o equilíbrio pós crítico;
- $M_{int}(1/r)$ divergir da curva $M_{ext}(1/r)$, impossibilitando que o equilíbrio pós crítico seja estável.

FIGURA 8 - ESTABILIDADE DE BARRA SUBMETIDA À COMPRESSÃO CENTRADA, COM O MATERIAL EM REGIME NÃO LINEAR



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Todavia, na maioria dos casos de avaliação de instabilidade de barras, já existe uma excentricidade de primeira ordem aplicada quando a peça ainda está na forma reta inicial. Essa situação passa a caracterizar um problema de flexão composta, cujos fundamentos são colocados nos parágrafos que seguem.

Um primeiro caso é o estudo de peças no regime elástico, verificando primeiramente a resposta da barra quando submetida à expressão simplificada da curvatura.

Nessa direção, a Equação (25) resulta da manipulação matemática da Equação (24), que é representativa do equilíbrio dos momentos externo e interno na flexão composta no regime elástico, possibilitando o cálculo dos deslocamentos transversais por apresentar termo independente. Todavia, o uso da equação simplificada da curvatura pode levar ao falso entendimento de que a carga crítica de Euler possui algum significado físico real nos casos de flexão composta. Isso pode ser explicado aplicando-se um limite para y , com F tendendo a F_{crit} : o resultado será um valor que tende ao infinito, o que não ocorre na realidade. O que efetivamente pode-se concluir é que enquanto o material permanecer no regime elástico não ocorrerá nenhum problema de instabilidade na flexão composta. Assim, é possível afirmar que a ruína acontecerá apenas se o material se romper. A FIGURA 9 facilita o entendimento desse fenômeno e permite a observação do comportamento dos deslocamentos com a utilização

das equações simplificada e exata da curvatura para barras fletidas e comprimidas no regime elástico.

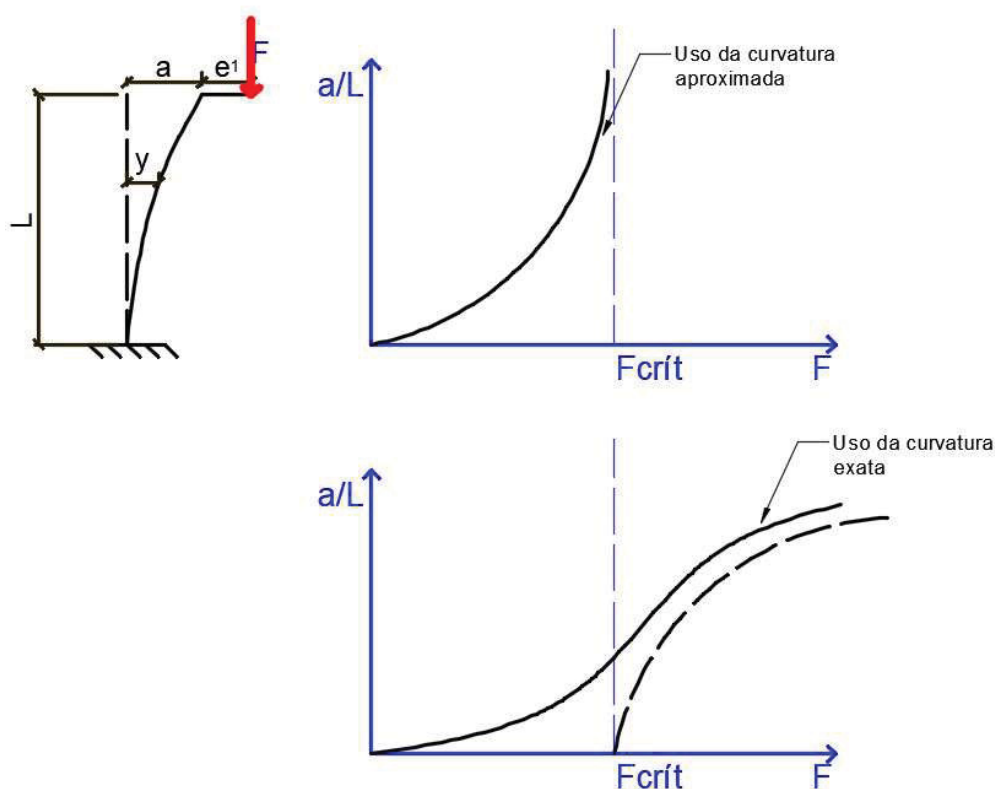
$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -F * (e_1 + y) \quad \text{Equação (24)}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{F}{E * I} * e_1 + \frac{F}{E * I} * y = 0 \quad \text{Equação (25)}$$

Onde:

e_1 : Excentricidade de primeira ordem aplicada à seção transversal.

FIGURA 9 - FLEXÃO COMPOSTA DE BARRAS ESBELTAS NO REGIME ELÁSTICO



FONTE: Adaptada de Fusco (1981).

Já para avaliar o que acontecerá com a configuração de uma barra sob flexão composta na qual as tensões tenham ultrapassado o limite de proporcionalidade, também é conveniente a hipótese de uma linha elástica senoidal. Partindo da expressão simplificada da curvatura, a equação dos deslocamentos transversais em função da curvatura será conforme a Equação (26).

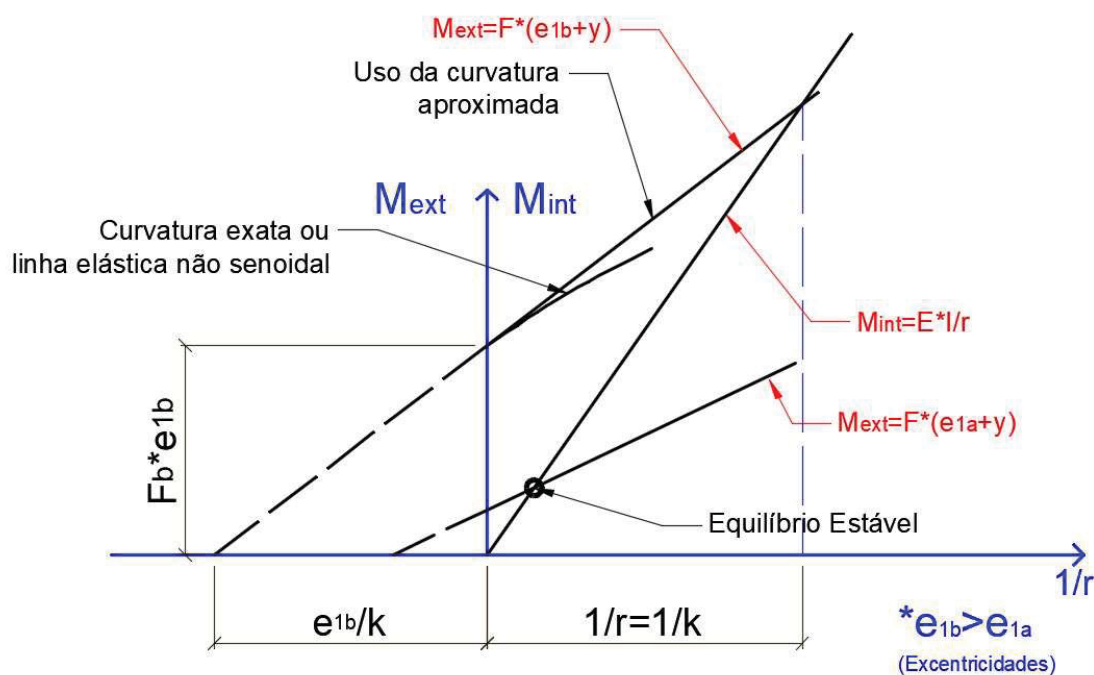
$$|y| \cong \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 * \frac{1}{r} \quad \text{Equação (26)}$$

$$M_{ext} = F * (e_1 + y) = F * e_1 + F * \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 * \frac{1}{r} \quad \text{Equação (27)}$$

Sendo assim, a expressão do momento externo é dada pela Equação (27), na qual observa-se que o momento externo será sempre uma função linear da curvatura. Porém, cabe ressaltar que esta afirmação só é válida quando se tem a linha elástica senoidal inserida na equação simplificada da curvatura.

Entretanto, a análise de estabilidade envolve também a equação do momento interno, que deve equilibrar o momento externo aplicado. Vê-se então que, enquanto o material estiver no ramo elástico, M_{int} também será uma função linear da curvatura $1/r$. Isso reforça a afirmação de que o equilíbrio da barra será estável na flexão composta elástica, já que sempre haverá uma certa curvatura que corresponderá ao cruzamento das retas M_{int} e M_{ext} . Esse é o caso ilustrado pela FIGURA 10, na qual tanto a excentricidade e_{1b} quanto a excentricidade e_{1a} podem ser aplicadas sem que haja a perda de estabilidade, mesmo com e_{1b} sendo consideravelmente maior que e_{1a} .

FIGURA 10 - INSTABILIDADE NA FLECO-COMPRESSÃO COM MATERIAL EM REGIME ELÁSTICO

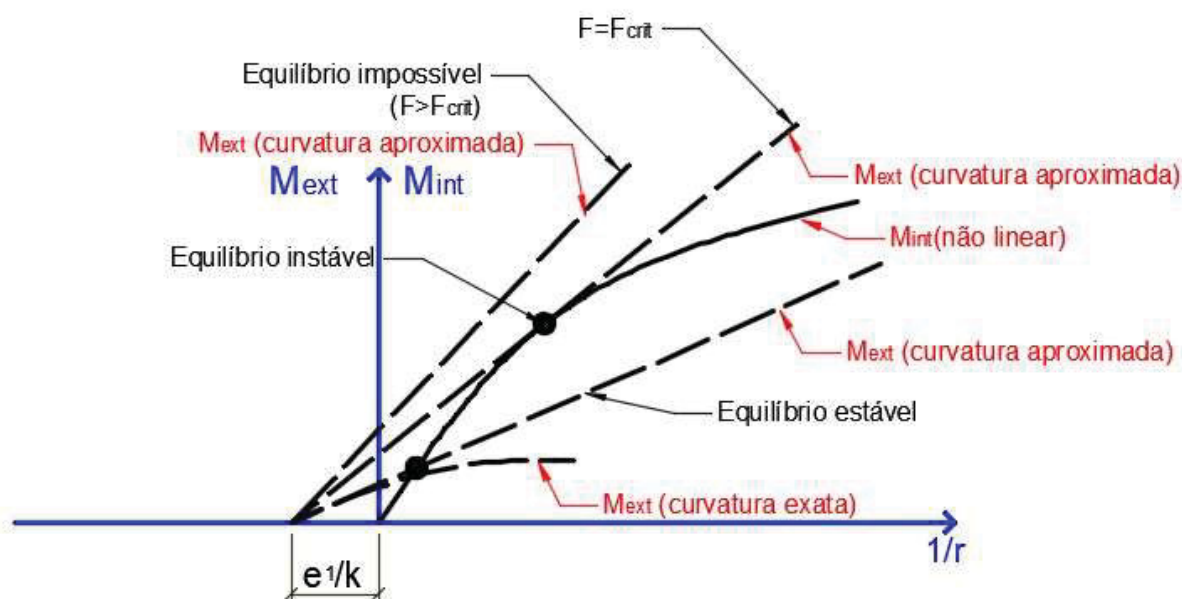


FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Contudo, ao atingir o limite de proporcionalidade, o comportamento da função $M_{int}(1/r)$ deixa de ser linear, dando origem a um possível fenômeno de instabilidade. Mantendo-se a curvatura aproximada, M_{ext} continuará sendo uma reta, que poderá interceptar ou não a curva M_{int} . Ou seja, caso a carga vertical que gera o momento externo seja maior ou igual a um valor F_{crit} , haverá instabilidade na peça, pois uma forma de equilíbrio não será fisicamente possível.

Destaca-se que, mesmo com o abandono das hipóteses de curvatura aproximada e linha elástica senoidal, a característica de eventual instabilidade persistirá. Apenas a não-linearidade da função que rege o momento interno propiciará a manifestação de um ponto de tangência à função do momento externo, correspondente ao valor F_{crit} . A FIGURA 11 retrata o estudo do equilíbrio na flexão composta não linear.

FIGURA 11 - INSTABILIDADE NA FLEXO-COMPRESSÃO COM MATERIAL EM REGIME NÃO LINEAR



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

2.2. DIAGRAMAS MOMENTO FLETOR-FORÇA NORMAL-CURVATURA PARA SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO

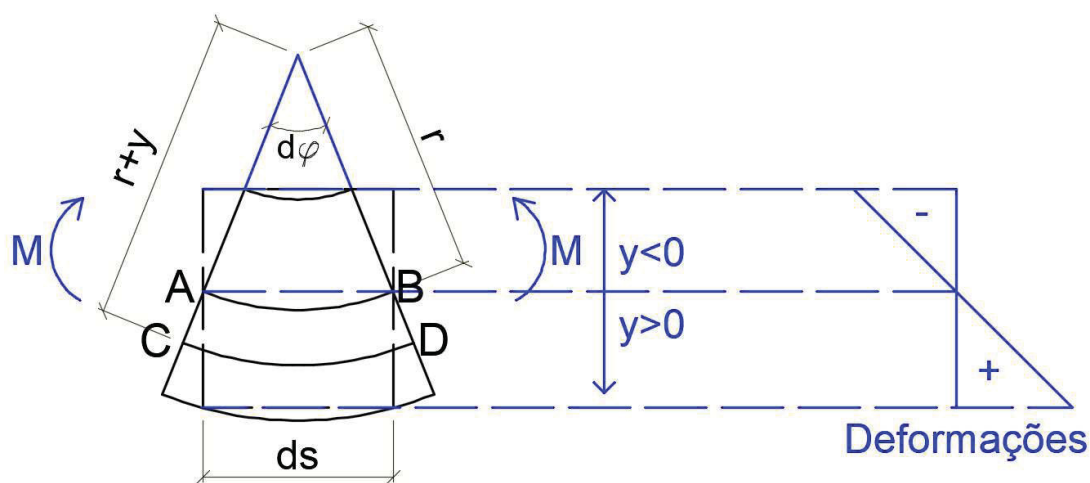
Pela disposição dos casos básicos de instabilidade em barras no item 2.1.2., percebe-se como é importante considerar as não-linearidades física e geométrica na avaliação de peças que sofrem flexão composta. Para tanto, é necessário estabelecer uma relação entre a curvatura das seções transversais

e os esforços solicitantes. Esta associação pode ser feita por diagramas de interação normal-momento-curvatura.

Embora tenha sido um dos conceitos apresentados para o estudo dos casos de estabilidade, é fundamental que se defina objetivamente o que é curvatura e qual sua relação com os esforços da flexão composta.

Considere-se então uma barra submetida a esforços que gerem compressão nas fibras superiores da seção e tração nas inferiores. Aplicados os esforços nesta barra, os alongamentos e encurtamentos das fibras farão com que os pontos pertencentes ao eixo do elemento se desloquem. Tais deslocamentos proporcionam uma forma curva para o eixo deformado da barra, caracterizando sua linha elástica. O valor r representa, deste modo, o raio de curvatura da linha elástica. Quando se analisa o valor inverso do raio de curvatura ($1/r$), encontra-se o valor da curvatura da seção. Conforme a FIGURA 12, é possível isolar um segmento da barra para estudar sua deformabilidade.

FIGURA 12 - CURVATURA NA FLEXÃO SIMPLES



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Com base na interpretação geométrica da FIGURA 12, a Equação (28) e a Equação (29) podem ser escritas.

$$\overline{AB} = r * d\varphi = ds \quad \text{Equação (28)}$$

$$\overline{CD} = (r + y) * d\varphi = ds + y * d\varphi \quad \text{Equação (29)}$$

Observa-se também que o mesmo segmento CD corresponde ao trecho indeformado ds multiplicado pela deformação específica de tração, como mostra a Equação (30).

$$\overline{CD} = ds * (1 + \varepsilon) = ds + ds * \varepsilon \quad \text{Equação (30)}$$

Onde:

AB: Comprimento do segmento curvo que liga o ponto A ao ponto B;

CD: Comprimento do segmento curvo que liga o ponto C ao ponto D;

r: raio de curvatura da seção transversal;

φ : ângulo correspondente à curvatura da seção;

ε : deformação específica de determinada fibra da seção.

Associando a Equação (30) e a Equação (31):

$$y * d\varphi = \varepsilon * ds \quad \text{Equação (31)}$$

Logo, a Equação (31) pode ser relacionada à Equação (28), dando origem à relação entre curvatura, deformação específica e deslocamentos transversais representada na Equação (32).

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon}{y} \quad \text{Equação (32)}$$

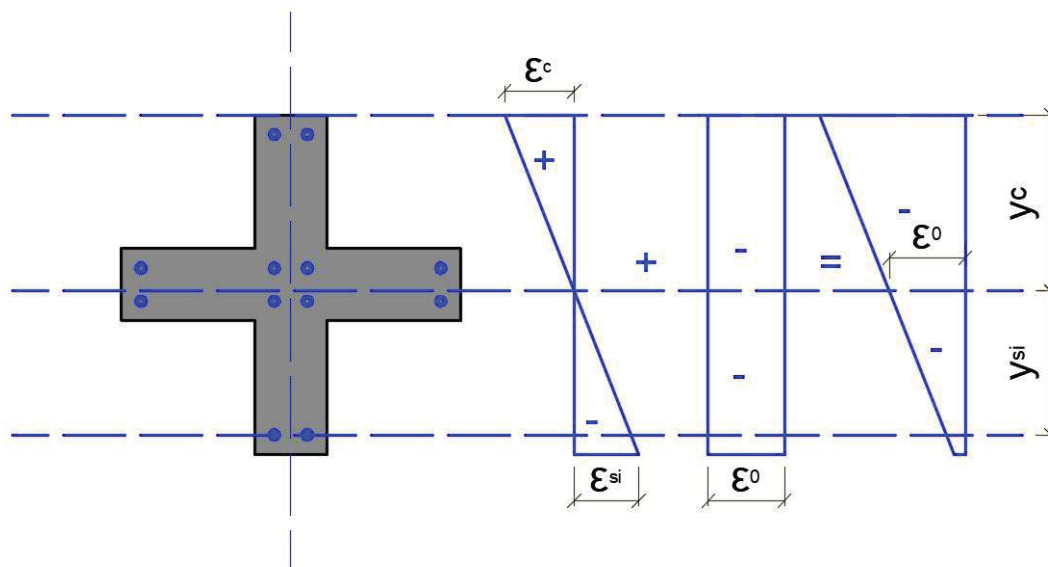
Caso o material possua linearidade física (Lei de Hooke), chega-se à relação entre momento fletor e curvatura, válida como ponto de partida para o entendimento dos Diagramas M-N-(1/r).

$$\sigma = \varepsilon * E = \frac{M}{I} * y \quad \text{Equação (33)}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{E * I} \quad \text{Equação (34)}$$

Contudo, para calcular o diagrama momento fletor-força normal-curvatura, é preciso entender que a curvatura da barra não dependerá da deformação total ε de suas fibras. O valor que guiará o cálculo da flexão da seção será a diferença entre ε e a deformação da fibra localizada no centro de gravidade da seção (ε_0), como esclarecido pela FIGURA 13 para uma seção de concreto armado.

FIGURA 13 - CURVATURA E DEFORMAÇÕES NA FLEZO-COMPRESSÃO PARA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Analizando uma seção transversal de concreto armado e levando em conta que as deformações são pequenas e que as seções permanecem planas após a deformação da peça, é possível estabelecer algumas condições de compatibilidade, como mostra a Equação (35).

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{y_c} = \frac{\varepsilon_{si} - \varepsilon_0}{y_{si}} \quad \text{Equação (35)}$$

Onde:

ε_c : deformação específica de determinada fibra de concreto;
 ε_0 : deformação específica da fibra situada no centro de gravidade da seção;
 ε_{si} : deformação específica do centro de gravidade de determinada barra de armadura inserida na seção transversal;
 y_c : distância entre determinada fibra de concreto e a linha neutra da seção transversal;
 y_{si} : distância entre o centro de gravidade de determinada barra de armadura e a linha neutra da seção transversal.

Considerando as deformações na seção de concreto e nas barras da armadura longitudinal da peça de concreto armado e conhecidos os diagramas tensão-deformação dos materiais, determina-se a distribuição de tensões axiais. Isso é feito utilizando-se as leis constitutivas dos materiais, assim como demonstram a Equação (36) e a Equação (37). Em seguida, com os diagramas de tensões axiais definidos sobre a seção transversal, cabe o cálculo dos esforços resultantes por meio das integrais de superfície da Equação (38) e da Equação (39).

$$\sigma_c = f(\varepsilon_0, y_c, \frac{1}{r}) \quad \text{Equação (36)}$$

$$\sigma_{si} = f(\varepsilon_0, y_{si}, \frac{1}{r}) \quad \text{Equação (37)}$$

$$N = \int \sigma_c * dA_c + \sum \sigma_{si} * A_{si} \quad \text{Equação (38)}$$

$$M = \int \sigma_c * y_c * dA_c + \sum \sigma_{si} * y_i * A_{si} \quad \text{Equação (39)}$$

Onde:

σ_c : tensão axial em determinada fibra de concreto;
 σ_{si} : tensão axial em determinada barra de armadura;
 A_c : área de concreto da seção transversal;
 A_{si} : área de determinada barra de armadura.

A construção dos diagramas momento-normal-curvatura geralmente é realizada através da variação da curvatura de uma seção transversal, submetida a um esforço normal pré-fixado. Com tais dados de entrada e um procedimento adequado de integração de tensões, chega-se ao valor do momento fletor resistente correspondente.

Embora o conceito da construção da superfície $M \times N \times 1/r$ seja relativamente simples, o procedimento em si envolve um processo iterativo, por tentativas ou aproximações sucessivas, visto que cálculos manuais são trabalhosos e exigem várias operações. Entretanto, o cálculo dos diagramas pode ser facilitado pela aplicação de rotinas computacionais, nas quais os processos de aproximação são automatizados.

Com o objetivo de gerar diagramas de interação para pilares retangulares de concreto armado, uma das metas específicas de Ribeiro (2011) foi ajustar equações polinomiais para as relações momento-curvatura. A intenção era que os polinômios pudessem ser tão precisos quanto os diagramas elaborados com

vários segmentos de reta. Para isso, foram usados dois procedimentos estatísticos diferentes, ambos fundamentados nas teorias de regressão. O autor variou o esforço normal adimensional (v) entre 0,0 e 1,0 para construir os diagramas.

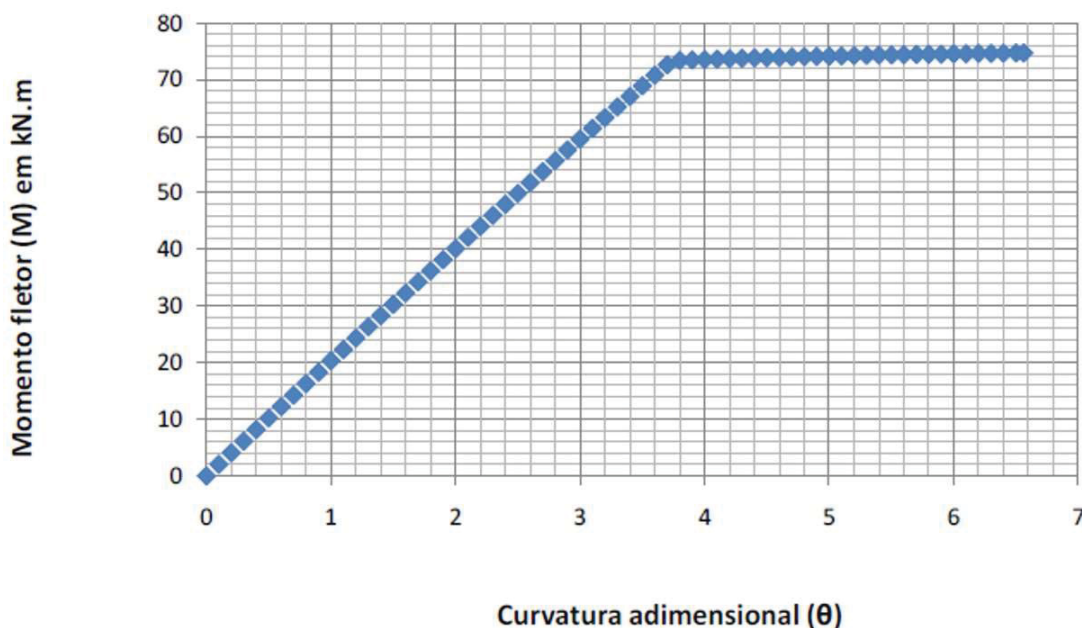
$$v = \frac{N}{A_c * f_{cd}} \quad \text{Equação (40)}$$

Onde:

v : esforço normal adimensional aplicado na seção transversal;
 N : esforço normal aplicado na seção transversal;
 A_c : área de concreto da seção transversal;
 f_{cd} : resistência de cálculo do concreto à compressão.

Para diagramas com esforço normal aplicado nulo (FIGURA 14), Ribeiro (2011) constatou que a parte final da curva é um trecho em que o valor do momento varia muito pouco em torno de uma média. Sendo assim, este ramo quase linear dificultou o ajuste de uma curva polinomial que abrangesse todo o espectro de curvaturas. A solução encontrada foi o ajuste de um trecho inicial parabólico, seguido de um patamar linear, com as condições de contorno de início e fim das curvas devidamente compatibilizadas para não haver descontinuidade.

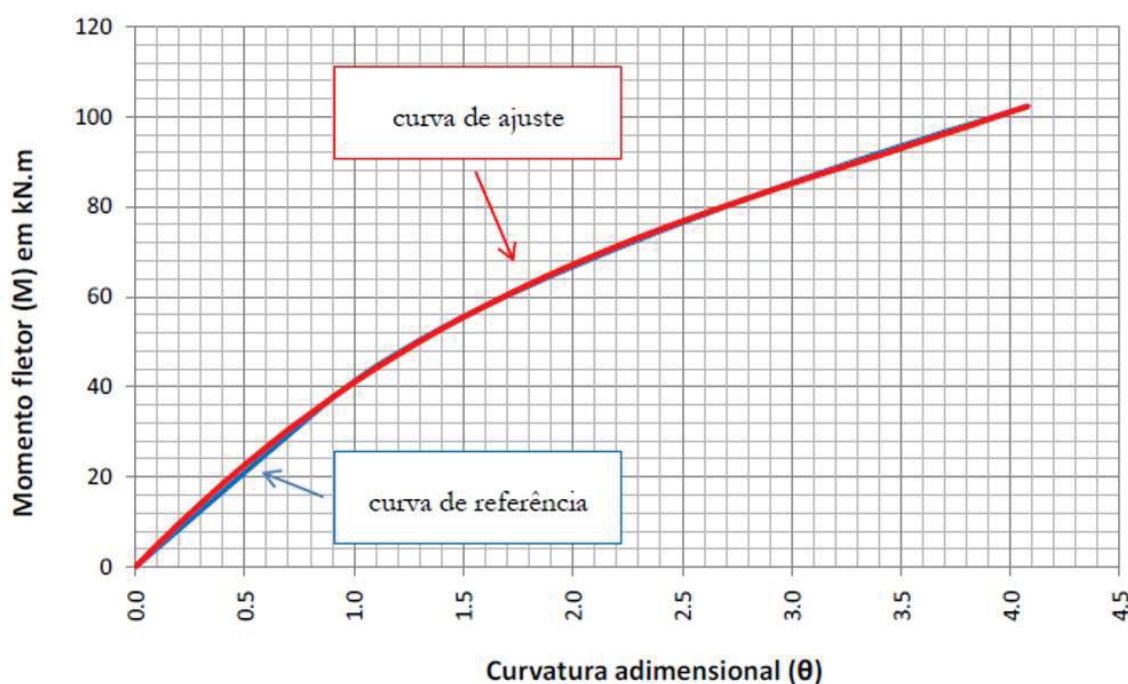
FIGURA 14 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA OBTIDO POR RIBEIRO (2011) PARA $v=0,0$



FONTE: RIBEIRO (2011).

Para a aplicação de níveis de compressão mais elevados nas seções transversais (ν igual ou superior a 0,3), Ribeiro (2011) conseguiu ajustar de maneira simples apenas uma equação polinomial para todo o intervalo de curvaturas aplicadas. Isso porque, nestas condições, os diagramas costumam não possuir um patamar bem definido. O grau dos polinômios de ajuste varia de 6 para $\nu=0,3$ até equações parabólicas para $\nu=1,0$. Na FIGURA 15 pode-se visualizar o ajuste de polinômio de grau 6 para descrever o diagrama momento-curvatura para $\nu=0,5$.

FIGURA 15 - EXEMPLO DE AJUSTE DE CURVA POLINOMIAL PARA $\nu=0,5$



FONTE: RIBEIRO (2011).

Gutierrez & Ochoa (2001) desenvolveram modelos analítico e numérico para calcular diagramas momento-normal-curvatura para seções de concreto armado e protendido com formato arbitrário. Os modelos permitiram considerar os efeitos de fluência e retração e empregaram equações não lineares para as relações constitutivas dos materiais. Para gerar os diagramas, foi utilizado um processo iterativo que fixa os valores da inclinação da linha neutra, da deformação da fibra mais comprimida do concreto e do esforço normal resistente da seção. Assim, realiza-se um processo de aproximação para descobrir quais os valores de curvatura e posição da linha neutra satisfazem as equações de equilíbrio de esforços.

Para confirmar a efetividade do processo iterativo criado, os autores buscaram a validação de dois exemplos com resultados de estudos experimentais de Gilliam *et al.* (1983). Os exemplos dizem respeito às seções de um pilar e de uma viga caixão protendida e, para ambos, foram obtidas boas correlações com os valores experimentais.

Simão *et al.* (2016) também estudaram as relações momento-normal-curvatura para seções de concreto armado. Os autores lançaram mão de rotinas computacionais não lineares e também deduziram expressões aproximadas que permitem o cálculo simplificado dos diagramas. Foram estudadas seções de formato retangular e “T”, para as quais foram assumidas relações constitutivas contínuas para o concreto e para o aço, no intuito de diminuir o esforço computacional inerente ao processo.

Conforme Simão *et al.* (2016), com o emprego de diagramas contínuos para expressar a relação tensão-deformação dos materiais, obtêm-se expressões diretas para o cálculo da profundidade da linha neutra em função da curvatura. Tais expressões são polinômios de ordem cúbica, que possuem solução analítica. A partir da comparação entre as curvas geradas pelas equações algébricas e as desenvolvidas com base na análise iterativa, percebeu-se que os resultados foram bastante próximos. Quando se adotou um comportamento perfeitamente elástico para as barras de aço, as equações diretas mostraram boa compatibilidade para curvaturas menores. Em curvaturas de valores maiores, as equações diretas tiveram boa aproximação quando se admitiu um comportamento perfeitamente plástico para o aço.

2.3. MÉTODOS DE ANÁLISE DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA LOCAL EM PILARES DE CONCRETO ARMADO

Existem métodos bastante utilizados em que a forma final de equilíbrio da barra é pré-determinada, o que possibilita a solução matemática do problema. O método do pilar-padrão, por exemplo, é abordado pela ABNT NBR 6118/2014 e pode ser associado a métodos refinados e simplificados de análise da não-linearidade física.

A aproximação estipulada pelo método do pilar-padrão é considerar a curva deformada do pilar como sendo senoidal. Dessa maneira, torna-se mais

fácil a determinação dos deslocamentos transversais da barra e, por consequência, dos esforços de segunda ordem.

No entanto, por este trabalho não ter o objetivo de avaliar os métodos simplificados, optou-se por tratar apenas dos métodos refinados de análise não-linear geométrica local de pilares.

Um dos métodos refinados mais consolidados para se calcular efeitos de segunda ordem em pilares é o método geral, um processo fundamentado no cálculo da carga crítica através da determinação das deformações da estrutura. Em sua rotina, considera a não-linearidade física do material e a não-linearidade geométrica do sistema. Nos estudos deste trabalho, o método geral é utilizado para todas as análises de instabilidade realizadas.

1.1.1. Método Geral

A ABNT NBR 6118/2014 afirma que o método geral “consiste na análise não-linear de 2ª ordem efetuada com a discretização adequada da barra, consideração do momento-curvatura real em cada seção e consideração da não-linearidade geométrica de maneira não aproximada”.

Salienta-se que o método geral é aplicável a qualquer tipo de estrutura, mesmo a barras de seção variável submetidas a qualquer tipo de carregamento. Resumidamente, o objetivo deste método é a construção do diagrama carga-deslocamento a partir de um deslocamento “y” que sirva de referência para a aferição da estabilidade da configuração de equilíbrio.

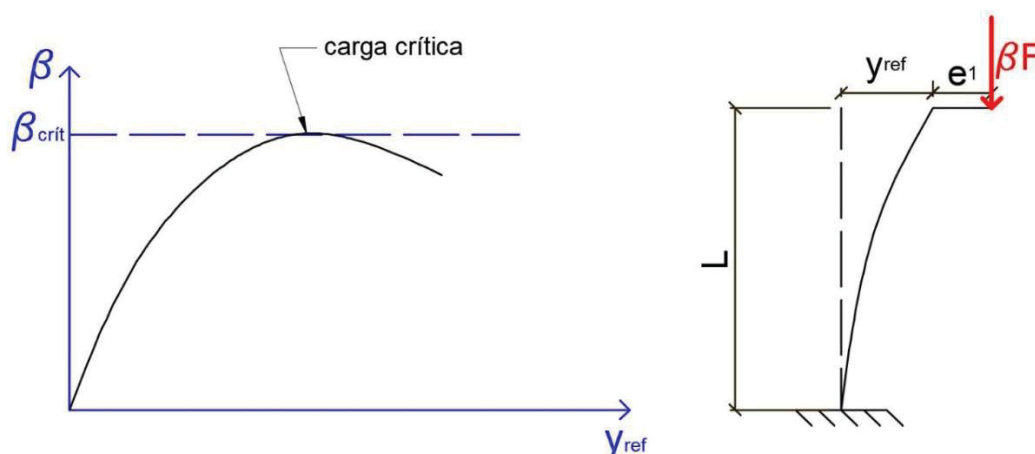
Sendo assim, é praticável o cálculo dos deslocamentos de duas maneiras:

a) variando-se as forças normais nas seções do pilar e fixando os momentos fletores de primeira ordem (processo do carregamento progressivo proporcional);

b) variando-se os momentos de primeira ordem ou as excentricidades nas seções e mantendo constantes os esforços normais (processo das excentricidades progressivas).

Com o diagrama carga-deslocamento gerado, conforme a FIGURA 16 exemplifica, a identificação de um ponto máximo relativo nesta curva caracterizará a instabilidade do sistema.

FIGURA 16 - DIAGRAMA CARGA DESLOCAMENTO PARA PROCESSO DO CARREGAMENTO PROGRESSIVO



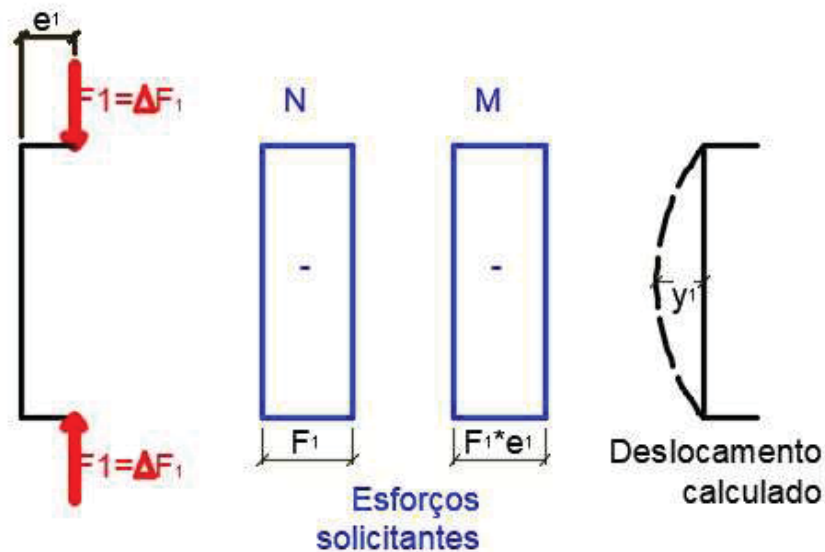
FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Em muitos casos, o processo do carregamento progressivo proporcional é aplicável. Para a utilização desta vertente do método geral, há um algoritmo iterativo bastante difundido entre os estudiosos do tema, cuja sequência é mostrada pela FIGURA 17 e listada abaixo:

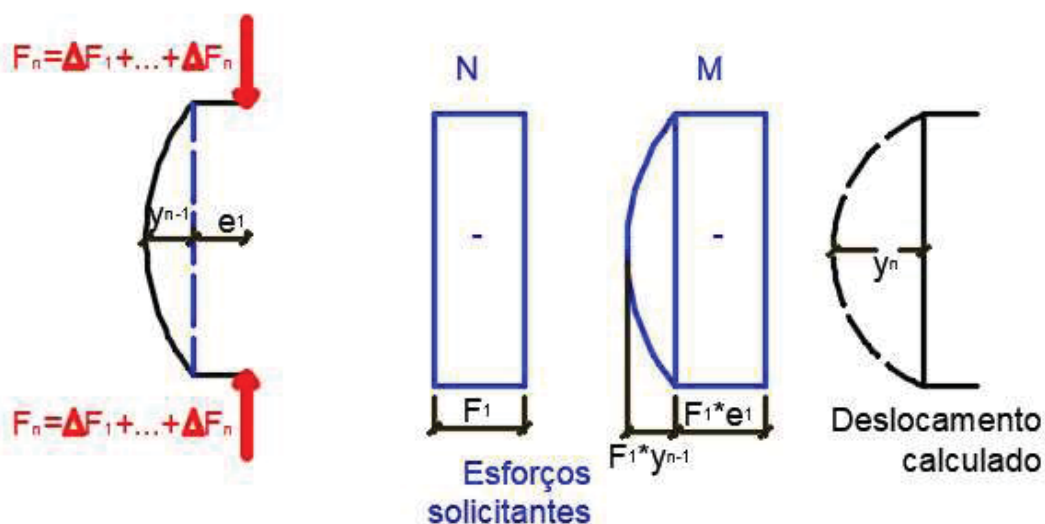
- a) define-se qual será o passo ($\Delta\beta$) com que o carregamento será incrementado em cada iteração. Todas as ações devem ser aplicadas proporcionalmente ao mesmo coeficiente β , que multiplicará F ;
- b) em cada etapa de carregamento $\beta \cdot F$, calculam-se os esforços solicitantes nas seções pré-determinadas;
- c) computam-se os deslocamentos transversais nas seções, principalmente na seção definida para o deslocamento de referência, através de um instrumento auxiliar que pode ser os diagramas $M-N-1/r$. Além disso, é preciso verificar se o pilar rompe ou não;
- d) caso a peça não tenha sofrido ruptura dos materiais, o valor de β evolui para $\beta = \beta + \Delta\beta$;
- e) repete-se o procedimento iterativo até que os deslocamentos transversais se estabilizem segundo um nível de tolerância ou até que o pilar sofra ruptura;
- f) o carregamento crítico será proporcionado pelo valor $\beta_{crit} \cdot F$, para o qual o diagrama carga-deslocamento tende de forma assintótica.

FIGURA 17 - PROCESSO DO CARREGAMENTO PROGRESSIVO PROPORCIONAL

1ª ETAPA



nª ETAPA

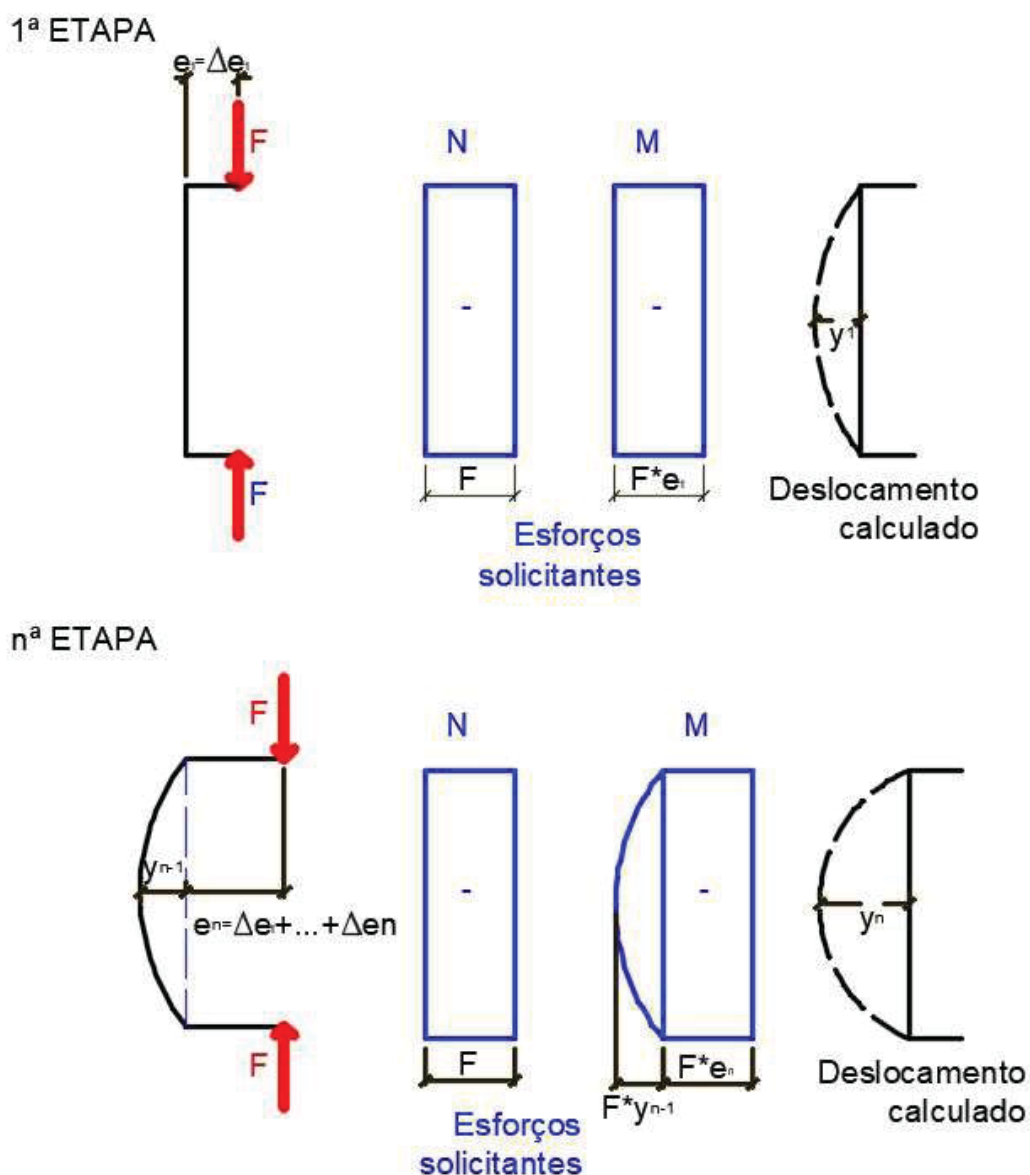


FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

Já pelo processo das excentricidades progressivas (FIGURA 18), a sequência a ser aplicada na análise de deslocamentos é a seguinte:

- na primeira etapa, impõe-se a excentricidade $e_1 = \Delta e_1$ para a força F de compressão e calcula-se o deslocamento y_1 para uma seção de referência;
- nas etapas seguintes, leva-se em conta, além da excentricidade aplicada $e_n = e_{n-1} + \Delta e_{1n}$, o deslocamento transversal calculado na etapa anterior;
- o valor da excentricidade crítica será obtido com o valor assintótico $e_{1,crit}$ do diagrama deslocamento x excentricidade.

FIGURA 18 - PROCESSO DAS EXCENTRICIDADES PROGRESSIVAS



FONTE: Adaptada de FUSCO (1981).

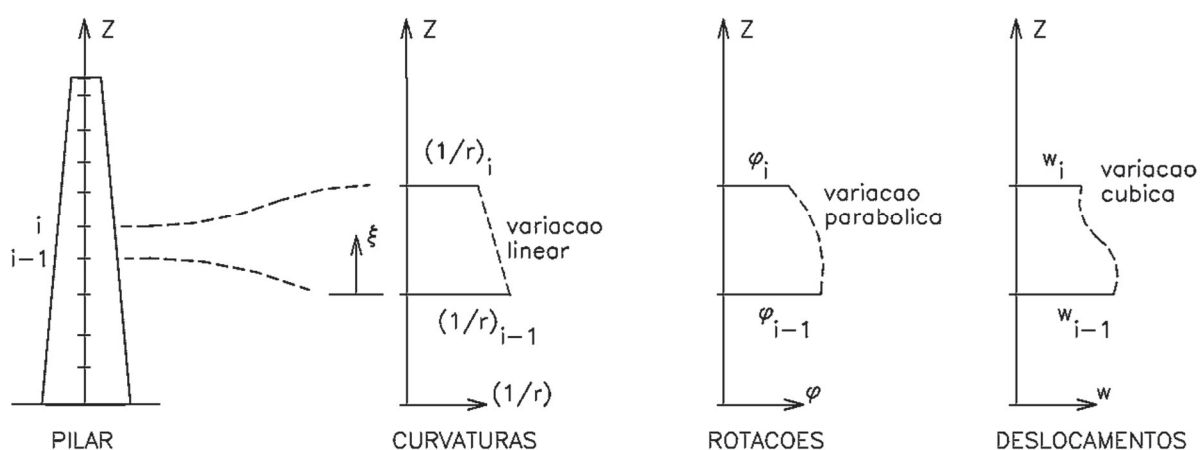
A precisão dos resultados dependerá fundamentalmente do valor $\Delta\beta$ ou de Δe e do número de seções levadas em conta no cálculo (discretização da peça). No entanto, quanto maior o número de incrementos de carga e de seções, maior a quantidade de operações inerentes ao processo. Assim, é possível constatar que a automatização via linguagens de programação é a alternativa que viabiliza o uso do método geral (FUSCO, 1981).

Cadamuro Júnior (1997) desenvolveu sua dissertação de mestrado com base no estudo de pilares esbeltos de seção qualquer. Destaca-se em sua

pesquisa a elaboração de algoritmos computacionais para avaliação da estabilidade das peças. Tais rotinas de programação utilizaram tanto o Método Geral quanto o Método do Equilíbrio (não abordado neste trabalho).

Segundo Cadamuro Júnior (1997), a principal diferença entre o Método do Equilíbrio e o Método Geral é que, enquanto o primeiro se preocupa em apenas retornar se o pilar é estável ou não, o segundo também objetiva determinar o valor da carga ou da excentricidade crítica para a peça. Para calcular as flechas nas seções do pilar, o autor utilizou a lógica proposta na FIGURA 19, na qual a curvatura possui variação linear, as rotações são uma função parabólica e os deslocamentos são cúbicos.

FIGURA 19 - CURVATURAS, ROTAÇÕES E DESLOCAMENTOS NO EIXO DO PILAR



FONTE: CADAMURO JÚNIOR (1997).

Assumidas tais hipóteses, Cadamuro Júnior (1997) lançou mão de coordenadas locais ξ , conforme a Equação (41), para cada trecho do pilar discretizado. Dessa forma as curvaturas foram escritas pela Equação (42) e as rotações pela Equação (43). Por fim, as deflexões transversais no pilar puderam ser calculadas pela expressão mostrada na Equação (44).

$$\xi = z - z_{i-1}$$

Equação (41)

$$\frac{1}{r} = a * \xi + b \quad \text{Equação (42)}$$

$$\varphi = \int \frac{1}{r} * d\xi = a * \frac{\xi^2}{2} + b * \xi + c \quad \text{Equação (43)}$$

$$y = \int \varphi * d\xi = a * \frac{\xi^3}{6} + b * \frac{\xi^2}{2} + c * \xi + d \quad \text{Equação (44)}$$

Onde:

ξ : coordenada local dentro do segmento de barra que une duas seções transversais avaliadas;
a, b, c e d: constantes de integração que dependerão das condições de contorno impostas à barra.

Pela interação entre as seções avaliadas e substituição das condições de contorno nas extremidades dos segmentos de barra, a flecha da seção i pode ser calculada pela Equação (45) com o auxílio da Equação (46).

$$y_i = y_1 + \sum_{k=2}^i \left\{ \frac{\left[\left(\frac{1}{r_k} \right) + 2 * \frac{1}{r_{k-1}} \right]}{6} * (z_k - z_{k-1})^2 + \varphi'_{k-1} * (z_k - (z_{k-1})) \right\} + \sum_{k=2}^i \varphi_1 * (z_k - z_{k-1}) \quad \text{Equação (45)}$$

$$\varphi'_i = \sum_{k=2}^i \frac{\frac{1}{r_k} + 2 * \frac{1}{r_{k-1}}}{2} * (z_k - z_{k-1}) \quad \text{Equação (46)}$$

Onde:

i: seção para a qual estão sendo calculados os deslocamentos transversais y;
k: valor que varia de 2 até i para computar o efeito das deformações ao longo da barra na seção i;
 φ_1 : rotação da seção de número 1 do pilar discretizado, que depende das vinculações dos apoios, e pode ser calculada de acordo com a Equação (47);
 φ'_1 : rotação relativa entre seção de número 1 e a seção i.

$$\varphi_1 = \begin{cases} -\frac{w'_{N_{seção}}}{Z_{N_{seção}}} \rightarrow \text{Apoio fixo} \\ 0 \rightarrow \text{Engaste} \\ \frac{M_1}{k_{mola}} \rightarrow \text{Engaste elástico} \end{cases} \quad \text{Equação (47)}$$

Onde:

M_1 : momento aplicado no apoio elástico rotacional;
 k_{mola} : rigidez rotacional do apoio elástico.

Outro aspecto interessante do trabalho de Cadamuro Júnior (1997) é a sugestão de valor para o incremento da carga aplicada ao pilar em cada iteração do Método Geral que, conforme o pesquisador, pode ser de 10% do valor da carga máxima.

Dando continuidade à pesquisa iniciada por Cadamuro Júnior (1997), Borges (1999) aprofundou-se na comparação dos modelos desenvolvidos na pesquisa anterior com os métodos aproximados constantes nas normativas vigentes na época.

A respeito da associação entre o Método Geral e o Processo Exato, proposta por Cadamuro Júnior (1997), Borges (1999) afirmou que: a) os resultados demonstraram boa qualidade; e, b) o processo em si apresentou dificuldades para realizar cálculos com rapidez e simplicidade de manipulação.

Entre os fatores identificados por Borges (1999) como os de influência determinante nas análises, a autora destacou o índice de esbeltez. No caso do aumento da resistência à compressão do concreto, o valor da carga última teve um aumento discreto em pilares esbeltos. Contudo, pela observação das curvaturas, quanto mais resistente o concreto utilizado, maiores as diferenças entre os valores de curvatura encontrados no método geral e nos métodos simplificados da norma brasileira vigente.

Já Torrico (2009) estudou teórica e experimentalmente pilares esbeltos de concreto de alta resistência. Assim como Cadamuro Júnior (2007), as análises foram feitas englobando os Estados Limites Últimos de ruptura do concreto, de deformação excessiva da armadura longitudinal e de instabilidade do pilar.

No que diz respeito ao estudo da instabilidade de pilares, destaca-se na pesquisa de Torrico (2009) a comparação de resultados experimentais com os métodos teóricos, algo raro nas pesquisas nacionais sobre o tema. Conforme o

autor, o Método Geral analisa a ruína das peças, seja por instabilidade ou por ruptura dos materiais, mas não consegue identificar comportamentos pós-críticos dos pilares.

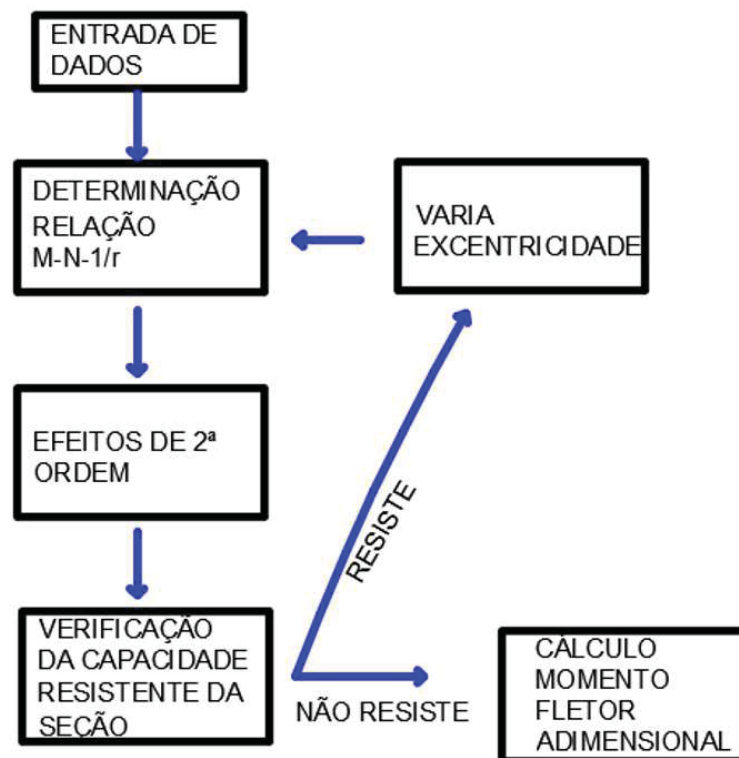
Torrico (2009) ainda acrescentou tópicos sobre o estudo do efeito do confinamento da seção, proporcionado pelos estribos. Este efeito provoca um incremento na capacidade de carga, contudo não se pode observar um claro aumento na ductilidade. Além disso, conclusões do trabalho apontam que o efeito do destacamento do cobrimento durante o processo de carregamento pode ser importante, pois existe a possibilidade de haver uma ruína súbita já que o efeito do confinamento dos estribos nem sempre é suficiente para compensar a perda de seção transversal.

Ribeiro (2011), por sua vez, concentrou seus esforços na geração de diagramas de interação que considerassem os efeitos de 2ª ordem no pilar para o dimensionamento da armadura. Ressalta-se que o estudo foi restrito a seções transversais retangulares e índices de esbeltez até 90 e o Método Geral foi adotado para as análises em todos os procedimentos de cálculo.

Com os diagramas desenvolvidos, Ribeiro (2011) conseguiu verificar simultaneamente os Estados Limites Últimos de ruptura e de instabilidade. Além disso, as tabelas desenvolvidas possibilitaram a eliminação de parte dos cálculos, com a vantagem de levarem a dimensionamentos mais econômicos.

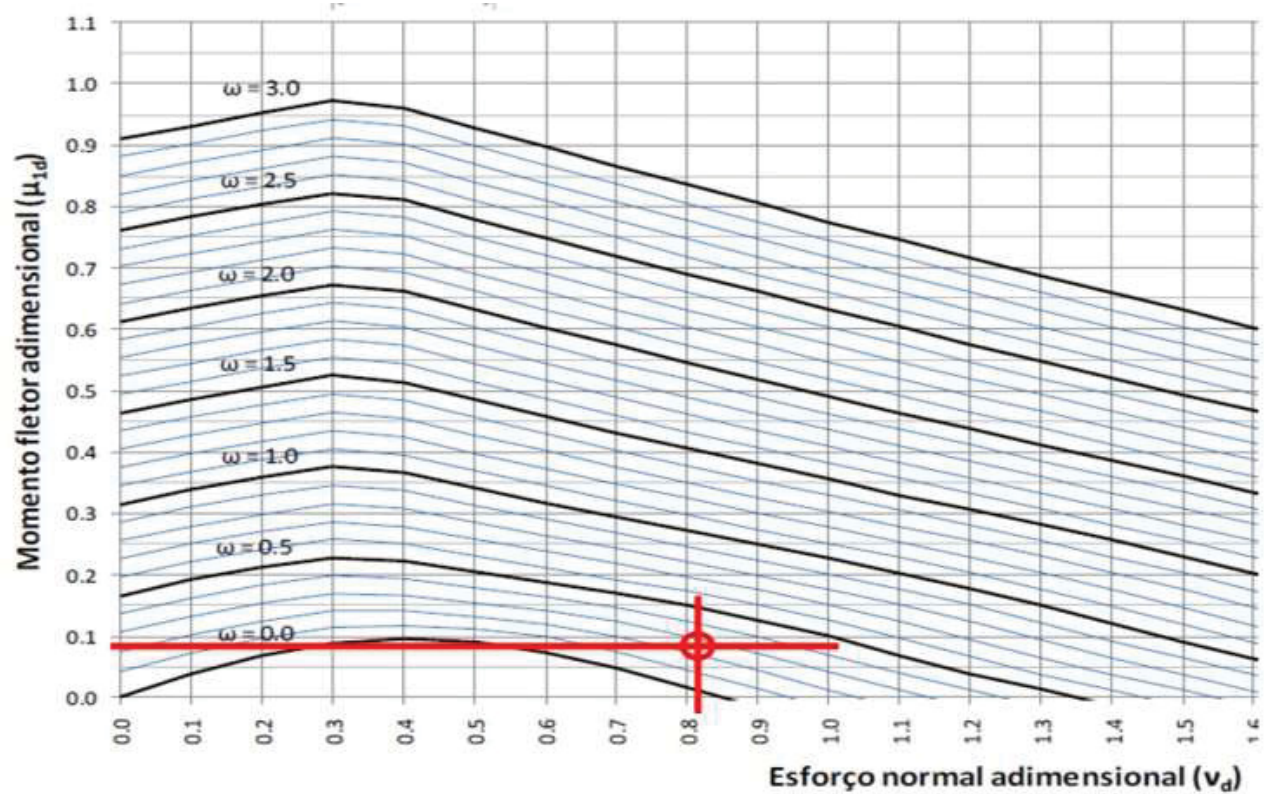
Para desenvolver as tabelas e diagramas, Ribeiro (2011) lançou mão da Analogia de Mohr e do Método das Diferenças Finitas para o cálculo dos deslocamentos transversais. A sequência proposta para se chegar aos valores pontuais dos diagramas é a exposta na FIGURA 20. Com isso, o fluxograma leva a diagramas com a forma ilustrada na FIGURA 21.

FIGURA 20 - FLUXOGRAMA DE ALGORITMO QUE GERA DIAGRAMA DE INTERAÇÃO QUE LEVA EM CONTA O ÍNDICE DE ESBELTEZ



FONTE: Adaptado de RIBEIRO (2011).

FIGURA 21 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO COM A CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM



FONTE: RIBEIRO (2011).

Outro estudo relevante é o de Bazant *et al.* (1997), que propõe um método otimizado para o dimensionamento de pilares inseridos em pórticos, como ocorre na maioria das edificações civis. Molas rotacionais são incorporadas ao modelo para representar a rigidez elástica inerente às vigas adjacentes ao pilar.

Bazant *et al.* (1997) consideraram a simplificação da linha elástica senoidal, mas houve um incremento da formulação em relação a outros estudos: a consideração de um comprimento de onda variável para a senóide. Segundo os autores, um decréscimo gradual do comprimento de onda possibilita capturar a redistribuição das curvaturas durante o carregamento, o que é uma característica básica da resposta inelástica de pilares. Além disso, quando se chega a comprimentos de onda menores que o comprimento do pilar, pode-se simular pilares com curvatura reversa. Esta mudança na modelagem levou a uma boa aproximação dos resultados.

Ceccon (2008) estudou o efeito do desacoplamento das rigidezes de pilares em duas direções ortogonais entre si no cálculo dos efeitos de segunda ordem, principalmente para pilares de seção retangular. A pesquisa utilizou a integração numérica do diagrama de rotações ao longo da peça para o cálculo dos deslocamentos transversais e as curvaturas foram obtidas a partir da divisão dos momentos atuantes pela rigidez secante em cada direção (x e y).

Em seu trabalho, Ceccon (2008) analisou mais de 200.000 pilares em balanço e cerca de 70.000 pilares biapoiados e concluiu que o cálculo dos efeitos de segunda ordem pode ser feito com o desacoplamento das flexões nas direções dos eixos principais de inércia, empregando o valor da rigidez secante.

Na FIGURA 22 é possível entender as comparações entre os resultados calculados com as rigidezes desacopladas com aqueles calculados considerando o efeito conjunto das flexões ortogonais. Para os pilares biapoiados analisados, cerca de 90% dos modelos ficaram na região A2, enquanto 7% ficaram na região D e os outros 3% na região C do gráfico. Isso quer dizer que a totalidade das amostras se enquadraram em casos em que o desacoplamento é a favor da segurança, oferecendo resistência de cálculo menor ou igual ao cálculo acoplado. O eixo horizontal da FIGURA 22 representa a razão entre os momentos fletores solicitantes e resistentes para o caso acoplado, enquanto o eixo horizontal mede a mesma razão para o caso desacoplado.

FIGURA 22 - REGIÕES PARA COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS CONSIDERANDO E DESCONSIDERANDO AS FLEXÕES ACOPLADAS

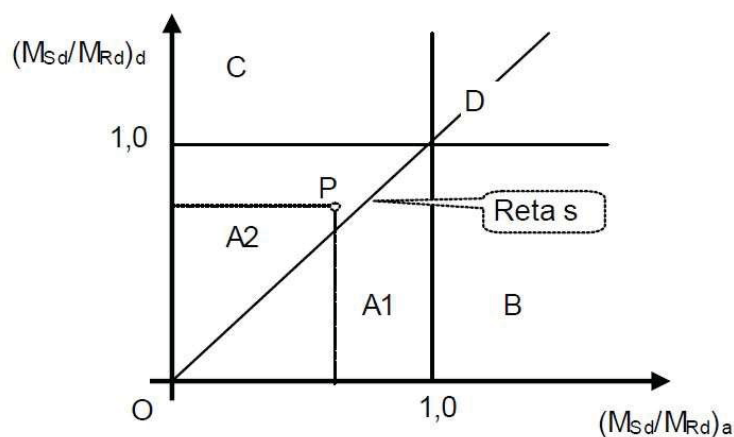
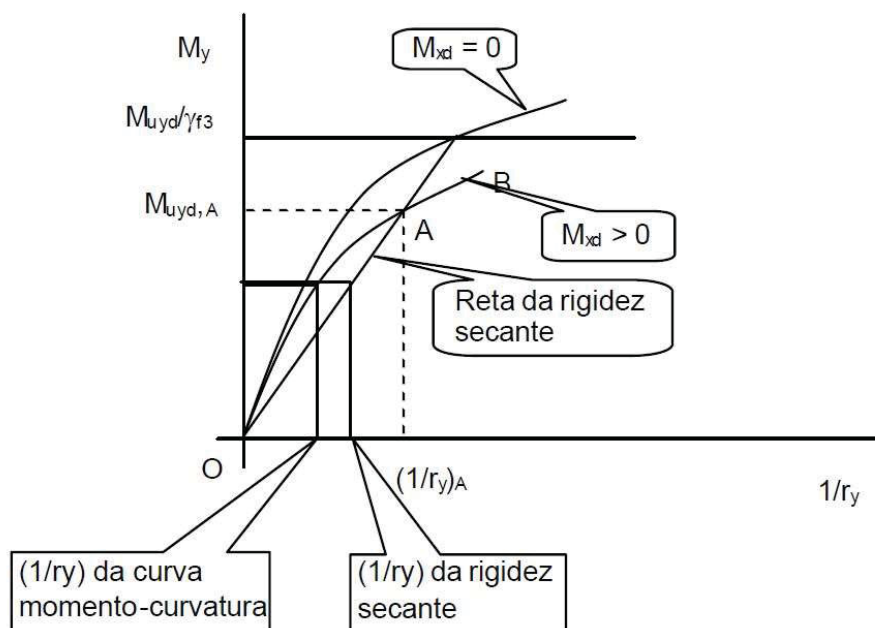


Figura 14.1 – Diagrama $(M_{Sd}/M_{Rd})_a$ - $(M_{Sd}/M_{Rd})_b$

FONTE: CECCON (2008).

A explicação encontrada por Ceccon (2008) para a possibilidade de se calcular os efeitos de segunda ordem isolando as flexões ortogonais está na análise das relações momento-curvatura. Segundo o autor, a parte útil da curva OAB da FIGURA 23 é sempre o trecho que está acima da reta que define a rigidez secante da flexão acoplada. Assim, o valor correspondente de curvatura segundo a curva OA será sempre menor que a curvatura calculada pela rigidez secante (dentro do trecho útil).

FIGURA 23 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA ESQUEMÁTICO, MOSTRANDO A RELAÇÃO ENTRE UMA CURVA CONSTRUÍDA PARA $M_{xd} > 0$ E A RETA DA RIGIDEZ SECANTE



FONTE: CECCON (2008).

1.1.2. Analogia de Mohr

Como explicado anteriormente, um dos passos para a geração do diagrama carga-deslocamento é o cálculo das flechas nas seções. Para tal, dois processos diferentes podem ser aplicados: a analogia de Mohr e o método das diferenças finitas. Ambos, quando combinados com diagramas momento-curvatura, são capazes de levar a uma boa precisão nos resultados de deslocamentos.

A analogia de Mohr é um processo adequado à determinação dos deslocamentos transversais de uma barra fletida. Este artifício foi elaborado partindo da semelhança entre a equação diferencial da linha elástica, representada pela Equação (48), e a equação diferencial da estática, estabelecida matematicamente pela Equação (49). Há um comportamento similar entre a derivada dos momentos em relação a "x" e a derivada dos deslocamentos em relação a "x", correspondentes à Equação (50) e à Equação (51), respectivamente.

Logo, há uma analogia entre momentos fletores e os deslocamentos transversais (FIGURA 24), bem como entre o esforço cortante e as rotações angulares e entre a força imposta ao elemento e a razão M/EI .

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{E * I} \quad \text{Equação (48)}$$

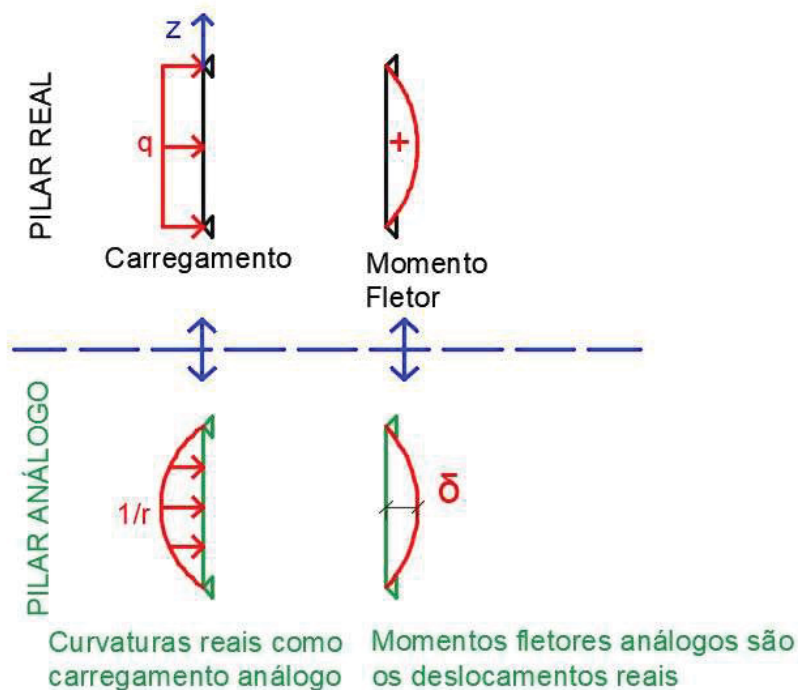
$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q \quad \text{Equação (49)}$$

$$\frac{dM}{dz} = Q \quad \text{Equação (50)}$$

$$\frac{dy}{dz} = \phi \quad \text{Equação (51)}$$

Os deslocamentos “y”, portanto, podem ser tratados como se fossem os momentos fletores em uma barra equivalente. O carregamento aplicado nesta barra será M/EI , correspondente às curvaturas das seções transversais. Neste processo, uma outra analogia é possível: os esforços cortantes calculados na barra equivalente corresponderão às rotações na barra real.

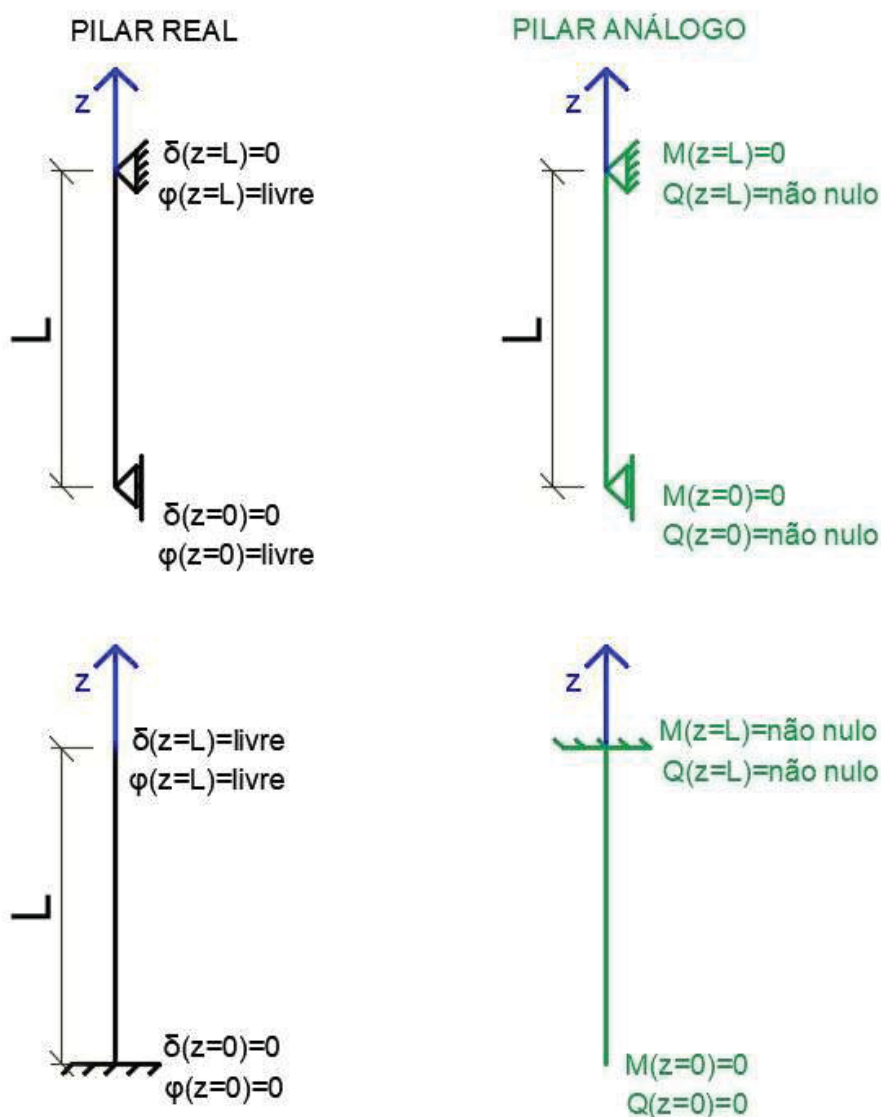
FIGURA 24 - ANALOGIA DE MOHR



FONTE: O autor (2017).

Uma ressalva importante é feita em relação aos vínculos a serem adotados na barra análoga. As condições de apoio dependerão diretamente daquelas aplicadas à barra real e devem ser compatíveis com o que ocorrerá com ela. Logo, se a barra real tiver um apoio simples, em que o deslocamento vertical é zero e a rotação é livre, a barra conjugada deve possuir um apoio em que o momento seja nulo e o esforço cortante não seja nulo. Assim, para este exemplo, a barra análoga terá as mesmas condições de apoio da barra real. Porém, isso não acontecerá sempre, já que a lógica proposta pela analogia de Mohr é a que deve ser seguida. A FIGURA 25 apresenta as condições de contorno que os pilares análogos devem ter para serem compatíveis com pilares reais simplesmente apoiados e engastados e livres.

FIGURA 25 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PILAR REAL E NO PILAR ANÁLOGO



FONTE: O autor (2017).

Loriggio (2009) enfatiza que uma vantagem da analogia de Mohr é a visualização da convergência para a forma de equilíbrio durante o procedimento. Isto ocorre quando se utiliza o deslocamento como critério de convergência.

2.4. CÁLCULO DE ESFORÇOS RESISTENTES EM SEÇÕES POLIGONAIS SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

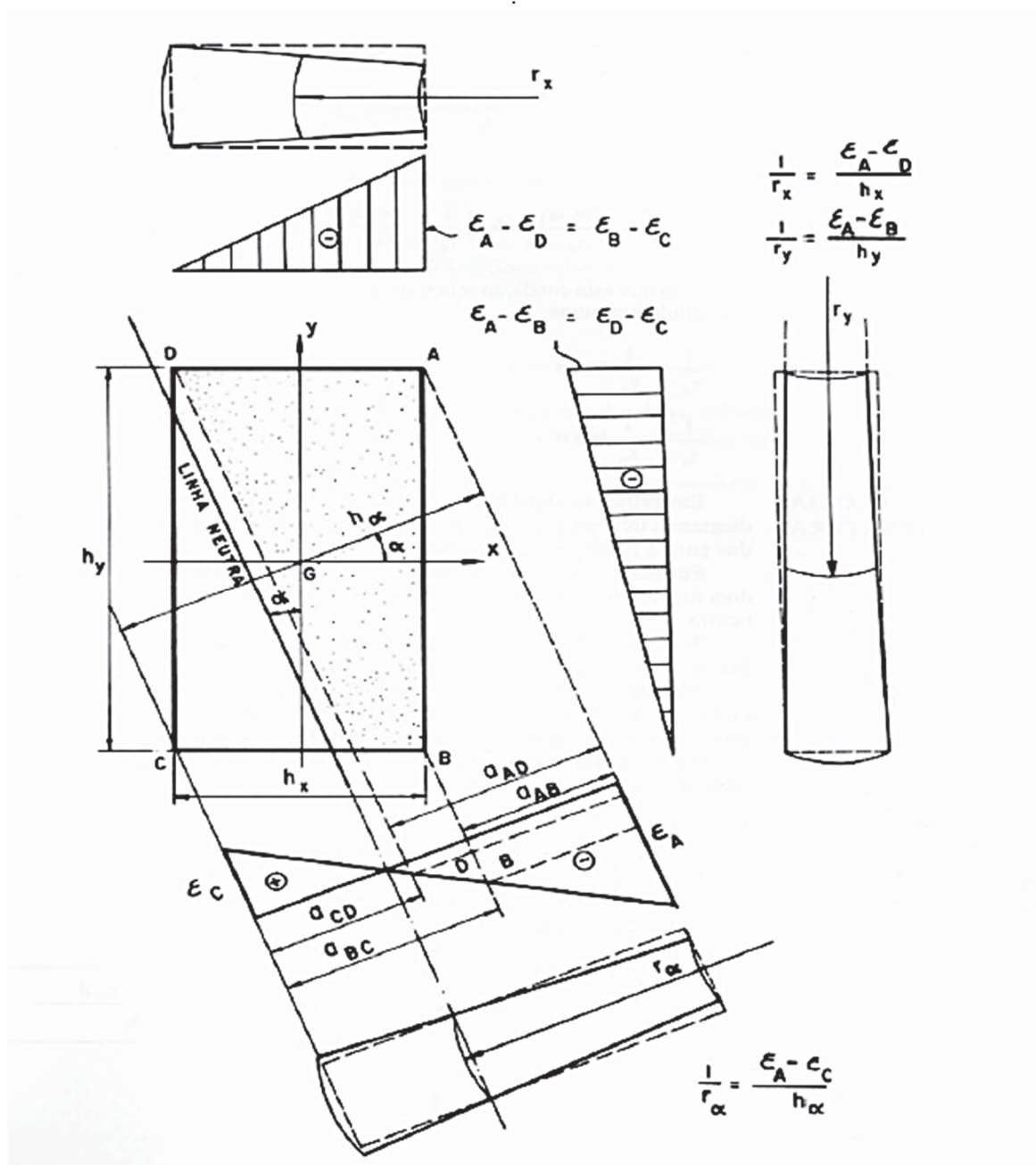
Na resolução da maioria dos problemas de dimensionamento e instabilidade de pilares, a etapa de cálculo dos esforços resistentes tem importância. Na construção dos diagramas $M-N-1/r$, por exemplo, um dos itens da sequência iterativa é determinar o momento fletor resistente da seção, a partir de um esforço normal e uma curvatura aplicados.

Os conceitos necessários para chegar aos esforços resistentes de uma seção poligonal de concreto armado encontram-se em três tópicos principais: as deformações na flexão composta oblíqua, o equilíbrio de tensões e os métodos de integração de tensões nas seções poligonais.

2.4.1. Deformações na flexão composta oblíqua

Levando em conta um segmento infinitesimal de uma barra, de seção retangular, submetida à flexão composta oblíqua, cuja curvatura corresponde a $1/r_\alpha$ (FIGURA 26), pode-se fazer algumas análises sobre o estado de deformação das seções transversais.

FIGURA 26 - CURVATURAS E DEFORMAÇÕES DE SEGMENTO INFINITESIMAL SUBMETIDO À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA



FONTE: FUSCO (1981).

No caso dos vértices A, B, C e D, os valores das deformações nestes pontos podem ser escritos em função da curvatura $1/r_\alpha$, conforme a Equação (52). A curvatura pode ainda ser decomposta em x e y como mostram a Equação (53) e a Equação (54).

$$\frac{1}{r_\alpha} = (\epsilon_A - \epsilon_C)/h_\alpha$$

Equação (52)

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_D}{h_x} = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_C}{h_x} \quad \text{Equação (53)}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{h_y} = \frac{\varepsilon_D - \varepsilon_C}{h_y} \quad \text{Equação (54)}$$

Onde:

α : ângulo de inclinação da linha neutra em relação ao eixo x global definido para a seção;

$1/r_\alpha$: curvatura da seção na direção α ;

$1/r_x$: curvatura da seção na direção x;

$1/r_y$: curvatura da seção na direção y;

h_α : altura da seção transversal segundo o ângulo α .

A relação entre a Equação (52), a Equação (53) e a Equação (54) resulta na expressão da Equação (55).

$$\frac{h_x}{r_x} = \frac{h_y}{r_y} = \frac{h_\alpha}{r_\alpha} \quad \text{Equação (55)}$$

$$h_\alpha = h_x * \cos(\alpha) + h_y * \sin(\alpha) \quad \text{Equação (56)}$$

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_\alpha} * \cos(\alpha) \quad \text{Equação (57)}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_\alpha} * \sin(\alpha) \quad \text{Equação (58)}$$

E, levando em conta a Equação (56), têm-se a Equação (57) e a Equação (58), que podem ser aplicadas no cálculo de diagramas M-N-1/r para a flexão composta oblíqua. De forma teórica, os diagramas podem ser determinados, desde que se tenham pré-fixados os valores da inclinação da linha neutra, da curvatura da seção e do esforço normal atuante.

2.4.2. Cálculo das contribuições resistentes

Com as características mecânicas e geométricas definidas, bem como o estado de deformações de uma seção transversal de um pilar de concreto armado, um passo importante é calcular o esforço normal e o momento fletor resistentes.

É nesta etapa que estão envolvidos procedimentos complexos de integração de campos de tensões, principalmente no que tange à contribuição do concreto. Vale ressaltar que as áreas de integração de tensões serão poligonais comprimidas irregulares.

No caso das barras de armadura, em que é comum considerar uniforme a distribuição de tensões na área da barra, o cálculo do valor das resultantes é facilitado, ainda que se considerem relações constitutivas mais elaboradas.

2.4.2.1. Cálculo da contribuição resistente do concreto

A integração do campo de tensões pode ser feita de maneiras diferentes em áreas poligonais comprimidas. Como os cálculos devem ser repetidos várias vezes, para efeito de dimensionamento, a escolha do método a ser utilizado representa uma importante influência no tempo de processamento dos modelos.

Para a obtenção dos esforços na seção de concreto, o aspecto genérico das equações integrais segue o que está representado na Equação (59), na Equação (60) e na Equação (61).

$$N = \int_{A_c} \sigma_c * dA \quad \text{Equação (59)}$$

$$M_x = \int_{A_c} y * \sigma_c * dA \quad \text{Equação (60)}$$

$$M_y = \int_{A_c} x * \sigma_c * dA \quad \text{Equação (61)}$$

Onde:

N: esforço normal resistido pela seção de concreto;
 M_x : momento em torno do eixo x resistido pela seção de concreto;
 M_y : momento em torno do eixo y resistido pela seção de concreto;
 A_c : área resistente de concreto;
 σ_c : equação da tensão resistente do concreto;

Lembra-se que, exceto por simplificações propostas por normativas de projeto, a função σ_c a ser considerada geralmente é não linear, o que torna a integração um processo mais elaborado. Para resolver o problema, pode-se recorrer tanto a métodos gráficos quanto a procedimentos de integração numérica ou analítica.

Cadamuro Júnior (1997) menciona em seu trabalho o chamado processo das malhas, que se baseia na divisão da seção transversal em um número considerável de elementos. Isso é feito para que seja possível tomar as tensões em cada elemento como constantes, em função da deformação representativa do mesmo.

Conforme o autor, esta metodologia é bastante difundida. No entanto, ela possui alguns inconvenientes. Um deles é o fato da distorção de forma que os elementos podem apresentar nas proximidades da linha neutra e no contorno da seção. Este fenômeno possivelmente levará a imprecisões. O outro é o grande número de elementos que deve ser gerado para que se tenha uma boa precisão. Devido ao nível de discretização exigido, o número de operações matemáticas também será grande.

Outra opção para a resolução das integrais é o tratamento numérico do problema. Como exemplo, pode-se implementar uma área retangular na qual a seção transversal esteja inscrita. Nesta área retangular, são alocados pontos de Gauss de maneira estratégica, de modo a considerar que a integral sobre o retângulo seja representativa da integral da seção real.

As equações para calcular os esforços com o auxílio da quadratura de Gauss assumiriam a forma mostrada pela Equação (62).

$$F_c = \sum_{i=1}^n f(y_i) * w_i \quad \text{Equação (62)}$$

Onde:

F_c : força normal ou momento fletor resultante na seção de concreto;
 y_i : coordenada do i-ésimo ponto de integração;

$f(y_i)$: valor pontual da função que está sendo integrada;
 w_i : peso de um ponto de integração de Gauss.

Vale ressaltar que as coordenadas e os pesos utilizados na quadratura de Gauss são facilmente calculados a partir de valores tabelados. Uma outra vantagem deste processo é a adaptabilidade a qualquer lei constitutiva não linear adotada para o concreto. No entanto, o grau de precisão dependerá do número de pontos de Gauss utilizados, o que pode gerar uma quantidade muito grande de cálculos.

Existem ainda outros métodos de integração numérica que podem ser aplicados no dimensionamento de seções de concreto armado como, por exemplo, o método do ponto médio, o método dos trapézios e o método de Simpson.

Já o processo da poligonal torna a integração possível pela transformação das integrais de superfície em integrais sobre o contorno da poligonal. Para chegar ao valor da integral de superfície da seção, a integral de contorno representada pela Equação (63) é satisfatória. O sinal negativo deve ser imposto caso a sequência de integração siga o sentido anti-horário.

$$N = \int_{A_c} \sigma_c * dA = - \oint_C \sigma_c * x_\alpha * dy_\alpha \quad \text{Equação (63)}$$

Onde:

C: contorno da poligonal de concreto;
 α : ângulo de inclinação da linha neutra;
 x_α, y_α : coordenadas da poligonal rotacionadas segundo o ângulo α .

Ainda, para um dado contorno C, é possível que se discretize a integral total em um somatório de integrais ao longo de cada aresta do polígono fechado, como indica a Equação (64).

$$N = \sum_{i=0}^{n_a} - \oint_{\Delta C_i} \sigma_c * x_\alpha * dy_\alpha \quad \text{Equação (64)}$$

A principal vantagem deste tipo de solução é que a resposta é, teoricamente, “exata”. Ademais, o método não implica em uma quantidade excessiva de cálculos, já que a sequência não é iterativa.

Entretanto, há algumas desvantagens significativas atribuídas ao processo da poligonal. É preciso pré-definir o diagrama tensão-deformação do concreto para deduzir a formulação a ser empregada computacionalmente, por exemplo.

Também é importante salientar a existência de imprecisões numéricas no procedimento, conforme alertado por Santos (1994). Segundo o autor, isso pode ocorrer em duas situações diferentes:

a) quando o esforço normal é grande (aproximadamente 80% da carga máxima), exige um estado de deformação quase uniforme e a posição da linha neutra fica muito afastada da seção. Consequentemente, a curvatura adimensional poderá chegar a valores muito baixos, levando a imprecisões no cálculo de expressões em que tal valor esteja no divisor;

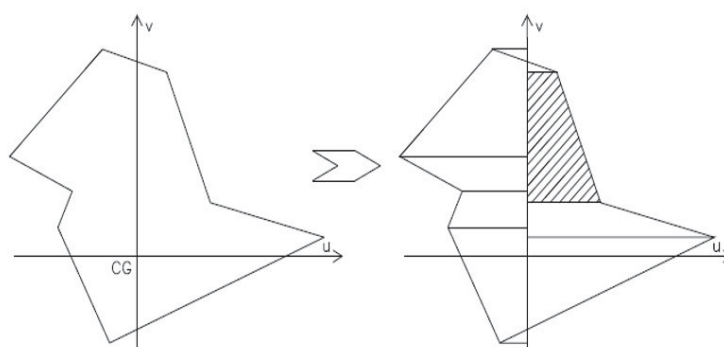
b) quando a direção da linha neutra é próxima do paralelismo com uma das arestas da poligonal de concreto.

Cadamuro Júnior (1997) utilizou o processo da poligonal associado à integração analítica do campo de tensões. Assim, optou por dividir a seção em vários trapézios, a partir dos quais extraiu os esforços resistentes (FIGURA 27 e FIGURA 28). A escolha foi feita para amenizar o tempo de processamento computacional e porque apresentou respostas teoricamente “exatas”.

Como já abordado, a integração analítica acaba exigindo que a relação tensão-deformação do concreto seja pré-estabelecida. Uma alternativa encontrada pelo autor para contornar o problema foi a adoção de leis polinomiais de graus arbitrários para representar as leis constitutivas. Isso permitiu que praticamente qualquer tipo de diagrama fosse representado.

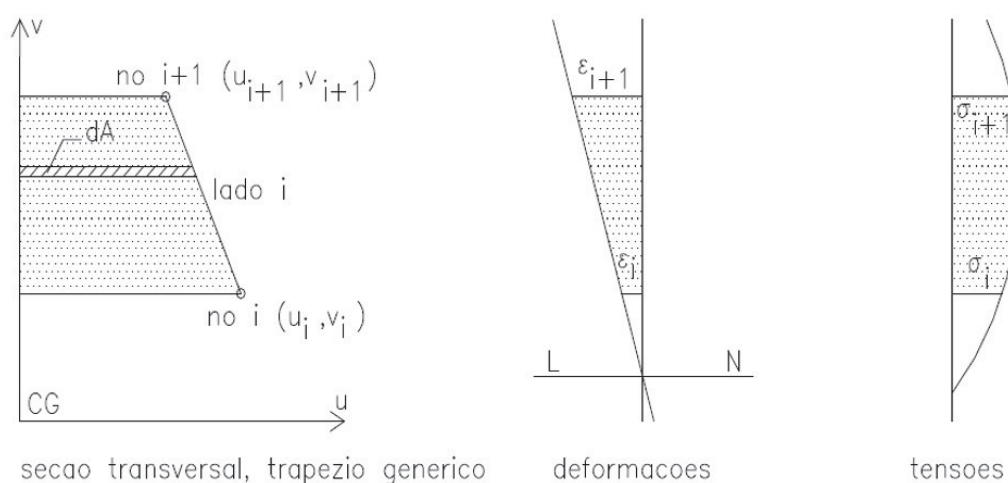
Após as análises dos resultados, Cadamuro Júnior (1997) afirmou não ter encontrado as imprecisões descritas por Santos (1994) quando se usa este método de integração.

FIGURA 27 - DIVISÃO DA POLIGONAL EM TRAPÉZIOS



FONTE: CADAMURO JÚNIOR (1997).

FIGURA 28 - INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES EM UM TRAPÉZIO GENÉRICO



secao transversal, trapezio generico

deformacoes

tensoes

FONTE: CADAMURO JÚNIOR (1997).

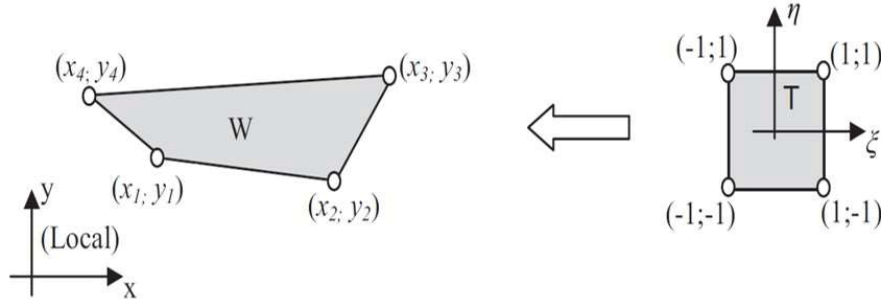
Assim como Cadamuro Júnior (1997), Rodrigues (2015) também utilizou a técnica de divisão da seção em trapézios e propôs um novo algoritmo para calcular a resistência de seções quaisquer solicitadas por flexão composta oblíqua. Contudo, uma das principais diferenças é que, em seu método, a integração é feita numericamente pela teoria de Gauss-Legendre.

Resumidamente, no algoritmo apresentado por Rodrigues (2015) a integração do trapézio é realizada em um quadrado correspondente de lado igual a 2, em um domínio local (ξ, η) , analogamente ao que é feito para elementos isoparamétricos utilizados no Método dos Elementos Finitos, como demonstra a FIGURA 29.

As coordenadas são, então, interpoladas por funções polinomiais bilineares, como na Equação (65). Tais funções são mostradas na Equação (66),

na Equação (67), na Equação (68) e na Equação (69). Dessa maneira, Rodrigues (2015) chega à Equação (70) para o cálculo do esforço normal resistente.

FIGURA 29 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA O DOMÍNIO GLOBAL (X,Y) PARA O DOMÍNIO LOCAL (ξ, η)



FONTE: RODRIGUES (2015).

$$(x, y) = g(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) * x_i \quad \text{Equação (65)}$$

$$N_1 = \frac{1 - \eta - \xi + \eta * \xi}{4} \quad \text{Equação (66)}$$

$$N_2 = \frac{1 - \eta + \xi - \eta * \xi}{4} \quad \text{Equação (67)}$$

$$N_3 = \frac{1 + \eta + \xi + \eta * \xi}{4} \quad \text{Equação (68)}$$

$$N_4 = \frac{1 + \eta - \xi - \eta * \xi}{4} \quad \text{Equação (69)}$$

$$N = \int_T \sigma_c * \left[\sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) * y_i \right] * |\det(J)| * d\xi * d\eta \quad \text{Equação (70)}$$

Onde:

N_i : funções de interpolação das coordenadas dos pontos do trapézio no domínio (ξ, η) ;

N : Esforço normal resistente no trapézio;

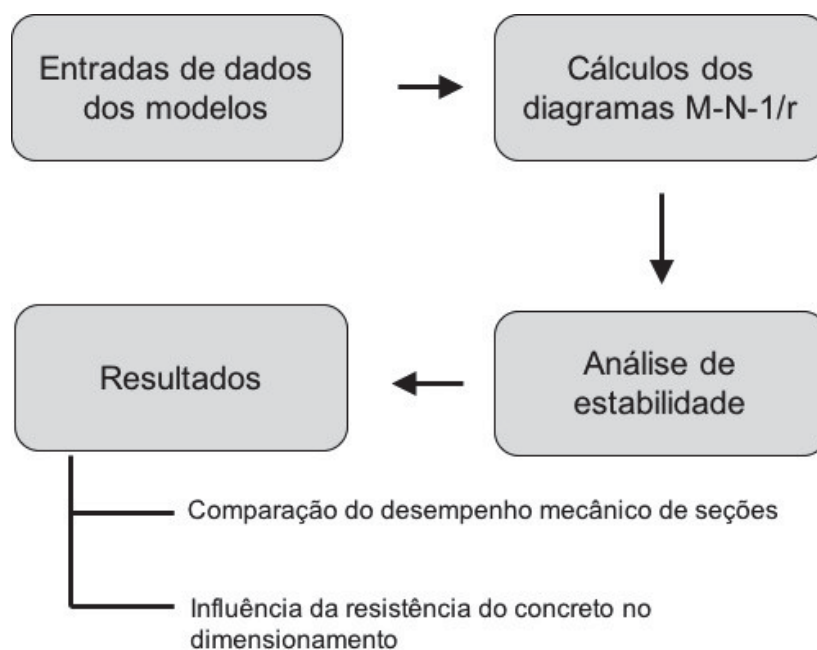
J : matriz Jacobiana para transformação do domínio (x, y) para o domínio (ξ, η) .

Para calcular a integral da Equação (70), Rodrigues (2015) utiliza 2×2 pontos de Gauss, distribuídos conforme a teoria aplicada, no quadrado de lado 2. De acordo com o pesquisador, uma das maiores vantagens da sistemática aplicada é que ela preserva a estrutura do polígono original, permitindo o uso recursivo do algoritmo se subdivisões adicionais forem necessárias.

2. MÉTODOS

Uma sequência lógica para o cumprimento dos objetivos é apresentada no fluxograma da FIGURA 30. Em seguida são detalhados os tópicos principais, indicando quais as ferramentas e os métodos para se chegar aos resultados desejados.

FIGURA 30 - FLUXOGRAMA GERAL PARA CUMPRIMENTO DOS OBJETIVOS DO TRABALHO



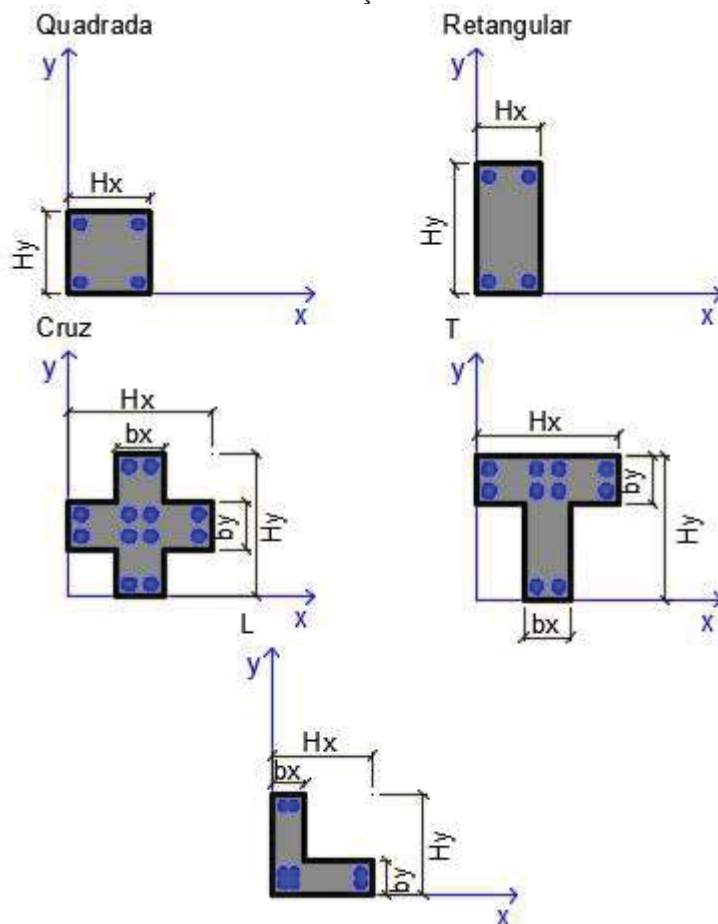
FONTE: O autor (2017).

Todos os resultados de processamento dos modelos são gerados a partir de uma rotina computacional, escrita em linguagem Python 3, que aplica todos os conceitos descritos a seguir. Como sugere o fluxograma da FIGURA 30, o programa é dividido em dois códigos principais: a construção de diagramas momento-normal-curvatura e a análise de estabilidade pelo método geral.

2.1. DADOS DE ENTRADA DOS MODELOS

A definição de modelos de pilares processados permite a comparação do desempenho entre eles. Visando realizar tais comparações e analisar os resultados obtidos, neste trabalho foram escolhidos os formatos de seção (FIGURA 31) mais usuais nas edificações civis: retangular, cruz, “L” e “T”.

FIGURA 31 - FORMATOS DE SEÇÃO TRANSVERSAL AVALIADOS



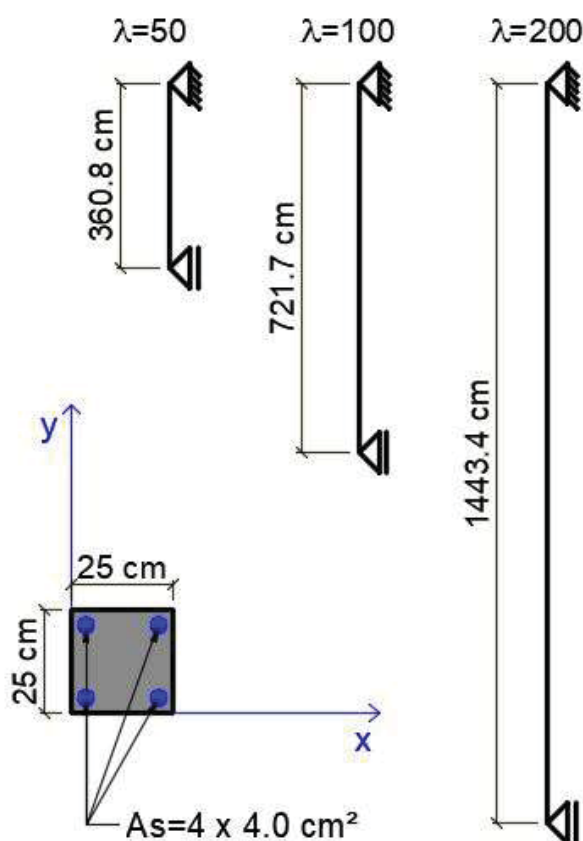
FONTE: O autor (2017).

A resistência característica do concreto também foi pré-definida e, para cada seção, calcularam-se os diagramas momento-normal-curvatura para f_{ck} igual 35 MPa e f_{ck} igual a 80 MPa, que foram estabelecidos pelo autor. No caso da seção quadrada, o modelo com concreto C55 também foi analisado, permitindo um estudo mais completo sobre a influência da resistência do concreto na resistência final dos pilares.

Como o objetivo é comparar o desempenho de seções com formatos e resistências de concreto diferentes, optou-se por manter nas amostras os mesmos consumos de materiais (concreto e aço) e os mesmos valores de índice de esbeltez na direção de menor inércia. É importante ressaltar que todos os modelos de pilares foram idealizados como biapoiados, com o mesmo comprimento destravado “L” nas direções x e y.

Primeiramente, foram estabelecidos três modelos de pilares de seção quadrada que serviram como base para o cálculo das dimensões dos demais modelos, conforme a TABELA 1 e a FIGURA 32.

FIGURA 32 - PILARES PADRÃO DE SEÇÃO QUADRADA



FONTE: O autor (2017).

TABELA 1 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA DEFINIDOS.

Seção	λ	Hx (cm)	Hy (cm)	L (cm)	Vc (cm ³)	A _{pl} (cm ²)	n ϕ l (barras)	A _s (cm ²)	V _s (cm ³)
Quadrada	50	25,00	25,00	360,8	225527	4	4	16	5774
Quadrada	100	25,00	25,00	721,7	451055	4	4	16	11547
Quadrada	200	25,00	25,00	1443,4	902110	4	4	16	23094

FONTE: O autor (2017).

Onde:

- λ : índice de esbeltez do pilar;
- H_x: dimensão da seção paralela a x;
- H_y: dimensão da seção paralela a y;
- L: comprimento do pilar;
- V_c: volume de concreto do pilar;
- A_{pl}: área de 1 barra longitudinal da seção;
- A_s: área de aço da seção;
- V_s: volume de aço do pilar.

Determinadas as propriedades geométricas dos pilares quadrados para os índices de esbeltez iguais a 50, 100 e 200, calcularam-se quais dimensões as seções com outros formatos deveriam ter para manter os mesmos volumes de concreto e as mesmas esbeltezes dos pilares de seção quadrada.

Além disso, o volume de aço dos pilares também foi pré-fixado, independentemente do número de barras que cada tipo de seção contivesse. A TABELA 2 apresenta a quantidade de barras de aço que foram definidas para cada seção, estabelecendo o número mínimo de barras que possibilitem a montagem construtiva da armadura.

TABELA 2 - NÚMERO DE BARRAS DE ARMADURA ADOTADO PARA CADA FORMATO DE SEÇÃO TRANSVERSAL

Seção	Nb
Quadrada	4
Retangular	4
Cruz	12
T	10
L	8

FONTE: O autor (2017).

Deste modo, foi possível chegar aos dados de entrada dos modelos, assim como mostra a TABELA 3. Salienta-se que os valores do cobrimento nominal (2 cm) e do diâmetro da armadura transversal (5 mm) foram fixados para todos os modelos. Outra informação importante é que as bitolas das barras não seguiram os padrões das bitolas comerciais, pois foram calculadas para manter os volumes de aço iguais aos das peças de seção quadrada.

Nas seções que possuíam inércias diferentes em x e y (seções retangulares e T), optou-se por igualar as esbeltezes em torno do eixo de menor inércia às esbeltezes da seção quadrada. Os critérios usados para definir as dimensões de cada seção são listados na Equação (71) e na Equação (72):

a) nas seções retangulares:

$$H_x = 2 * H_y \quad \text{Equação (71)}$$

b) nas seções em cruz, T e L:

$$H_x = H_y = 3 * b_x = 3 * b_y \quad \text{Equação (72)}$$

Onde:

H_x : dimensão maior da seção paralela a x;
 H_y : dimensão maior da seção paralela a y;

b_x : dimensão menor da seção paralela a x;
 b_y : dimensão menor da seção paralela a y.

TABELA 3 - MODELOS DE PILARES PROCESSADOS PELAS ROTINAS COMPUTACIONAIS

Número	Modelo	fck	λ_{crit}	λ_x	λ_y	Vc	Vs	Hx	Hy	bx	by	L	As	Nb
		MPa				cm ³	cm ³	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	unid
1	Q1	35	50	50	50	225527	5774	25,0	25,0	25,0	25,0	360,8	16,0	4,0
2	Q2	35	100	100	100	451055	11547	25,0	25,0	25,0	25,0	721,7	16,0	4,0
3	Q3	35	200	200	200	902110	23094	25,0	25,0	25,0	25,0	1443,4	16,0	4,0
4	Q1	55	50	50	50	225527	5774	25,0	25,0	25,0	25,0	360,8	16,0	4,0
5	Q2	55	100	100	100	451055	11547	25,0	25,0	25,0	25,0	721,7	16,0	4,0
6	Q3	55	200	200	200	902110	23094	25,0	25,0	25,0	25,0	1443,4	16,0	4,0
7	Q1	80	50	50	50	225527	5774	25,0	25,0	25,0	25,0	360,8	16,0	4,0
8	Q2	80	100	100	100	451055	11547	25,0	25,0	25,0	25,0	721,7	16,0	4,0
9	Q3	80	200	200	200	902110	23094	25,0	25,0	25,0	25,0	1443,4	16,0	4,0
10	R1	35	50	25	50	225527	5774	19,8	39,7	19,8	39,7	286,4	20,2	4,0
11	R2	35	100	50	100	451055	11547	19,8	39,7	19,8	39,7	572,8	20,2	4,0
12	R3	35	200	100	200	902110	23094	19,8	39,7	19,8	39,7	1145,6	20,2	4,0
13	R1	80	50	25	50	225527	5774	19,8	39,7	19,8	39,7	286,4	20,2	4,0
14	R2	80	100	50	100	451055	11547	19,8	39,7	19,8	39,7	572,8	20,2	4,0
15	R3	80	200	100	200	902110	23094	19,8	39,7	19,8	39,7	1145,6	20,2	4,0
16	C1	35	50	50	50	225527	5774	32,7	32,7	10,9	10,9	379,1	15,2	12,0
17	C2	35	100	100	100	451055	11547	32,7	32,7	10,9	10,9	758,3	15,2	12,0
18	C3	35	200	200	200	902110	23094	32,7	32,7	10,9	10,9	1516,6	15,2	12,0
19	C1	80	50	50	50	225527	5774	32,7	32,7	10,9	10,9	379,1	15,2	12,0
20	C2	80	100	100	100	451055	11547	32,7	32,7	10,9	10,9	758,3	15,2	12,0
21	C3	80	200	200	200	902110	23094	32,7	32,7	10,9	10,9	1516,6	15,2	12,0
22	T1	35	50	41	50	225527	5774	32,7	32,7	10,9	10,9	379,1	15,2	10,0
23	T2	35	100	82	100	451055	11547	32,7	32,7	10,9	10,9	758,3	15,2	10,0
24	T3	35	200	163	200	902110	23094	32,7	32,7	10,9	10,9	1516,6	15,2	10,0
25	T1	80	50	41	50	225527	5774	32,7	32,7	10,9	10,9	379,1	15,2	10,0
26	T2	80	100	82	100	451055	11547	32,7	32,7	10,9	10,9	758,3	15,2	10,0
27	T3	80	200	163	200	902110	23094	32,7	32,7	10,9	10,9	1516,6	15,2	10,0
28	L1	35	50	50	50	225527	5774	30,6	30,6	10,2	10,2	433,7	13,3	8,0
29	L2	35	100	100	100	451055	11547	30,6	30,6	10,2	10,2	867,4	13,3	8,0
30	L3	35	200	200	200	902110	23094	30,6	30,6	10,2	10,2	1734,7	13,3	8,0
31	L1	80	50	50	50	225527	5774	30,6	30,6	10,2	10,2	433,7	13,3	8,0
32	L2	80	100	100	100	451055	11547	30,6	30,6	10,2	10,2	867,4	13,3	8,0
33	L3	80	200	200	200	902110	23094	30,6	30,6	10,2	10,2	1734,7	13,3	8,0

FONTE: O autor (2017).

2.2. DIAGRAMAS MOMENTO-NORMAL-CURVATURA

As principais etapas consideradas na produção dos diagramas momento-normal-curvatura foram:

- a) definição dos valores de esforço normal adimensional (v) e inclinação da linha neutra (α);
- b) definição das leis constitutivas dos materiais;
- c) processo de convergência para encontrar curvatura máxima para o par (v, α);
- d) geração do diagrama momento-curvatura;
- e) processo de convergência para encontrar posição de equilíbrio da linha neutra para o ponto ($v, \alpha, 1/r$).

Então, torna-se necessária a compreensão mais detalhada de cada um dos tópicos listados, como é feito a seguir.

2.2.1. Valores de esforço normal adimensional e inclinação de linha neutra

Devido à utilização posterior dos diagramas momento-normal-curvatura para o cálculo das flechas dos pilares pelo Método Geral, foi necessário que tais diagramas fossem construídos de forma que as inclinações de linha neutra adotadas cobrissem todas as possibilidades de deslocamento das seções do pilar. Do mesmo modo, os diagramas precisavam atender a todas as combinações de flexo-compressão (esforço normal e momento fletor) suportadas pela seção transversal.

Assim, as rotinas computacionais implementadas utilizaram como dados de entrada vetores que continham todos os valores de inclinação de linha neutra (ângulo α), representados pelo vetor da Equação (73) e esforço normal adimensional (v), estabelecidos pelo vetor da Equação (74).

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta\alpha \\ 2 * \Delta\alpha \\ \dots \\ 2 * \pi \end{Bmatrix}_{n_\alpha} \quad \text{Equação (73)}$$

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \Delta v \\ 2 * \Delta v \\ 3 * \Delta v \\ \dots \\ v_{max} \end{Bmatrix}_{n_v} \quad \text{Equação (74)}$$

Onde v é calculado pela Equação (75), o valor do incremento discreto de ângulo $\Delta\alpha$ pela Equação (76) e o incremento discreto de esforço normal adimensional Δv pela Equação (77).

$$v = \frac{N}{A_c * f_{cd}} \quad \text{Equação (75)}$$

$$\Delta\alpha = 2 * \frac{\pi}{n_\alpha} \quad \text{Equação (76)}$$

$$\Delta v = \frac{v_{max}}{n_v} \quad \text{Equação (77)}$$

Onde:

- $\{\alpha\}$: vetor com todas as inclinações de linha neutra que farão parte do cálculo dos esforços resistentes;
- $\{v\}$: vetor com todos os valores de esforço normal adimensional aplicados à seção transversal;
- v : esforço normal adimensional;
- $\Delta\alpha$: incremento discreto do ângulo α ;
- n_α : número de valores de inclinação de linha neutra entre 0 e $2*\pi$, tomado como igual a 721 para todas as seções transversais, de maneira que se obtenham diagramas momento-curvatura para cada intervalo de $0,5^\circ$;
- Δv : incremento discreto de esforço normal adimensional;
- v_{max} : valor do esforço normal adimensional máximo aplicado na seção transversal, admitido como igual a 2,0 em todas as seções transversais;
- n_v : número de incrementos de esforço normal adimensional, admitido como 20 em todas as seções transversais;
- A_c : área de concreto da seção transversal;
- f_{cd} : resistência de cálculo à compressão do concreto;
- N : esforço normal aplicado à seção.

2.2.2. Leis constitutivas dos materiais

Tanto para o concreto quanto para o aço, a escolha foi por seguir os diagramas recomendados pela ABNT NBR 6118/2014. No caso do concreto,

desprezou-se sua contribuição sob tensões de tração. Já para simular o comportamento à compressão, utilizou-se o diagrama idealizado parábola-retângulo, generalizado para a aplicação em concretos de f_{ck} até 90 MPa. A FIGURA 33 mostra a forma tomada pelo diagrama, gerado pela Equação (78).

$$\sigma_c = \begin{cases} 0,85 * f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], & \text{se } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ 0,85 * f_{cd}, & \text{se } \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad \text{Equação (78)}$$

A resistência de cálculo à compressão, por sua vez, é dada pela Equação (79).

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{Equação (79)}$$

Em relação às deformações que limitam o diagrama parábola-retângulo e ao expoente n , vê-se pela Equação (80), pela Equação (81) e pela Equação (82) que as formulações mudam conforme o valor do f_{ck} .

$$\varepsilon_{c2} = \begin{cases} 0,2\%, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,2\% + 0,0085\% * (f_{ck} - 50)^{0,53}, & \text{se } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação (80)}$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 0,35\%, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,26\% + 3,5\% * \left[\frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4, & \text{se } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação (81)}$$

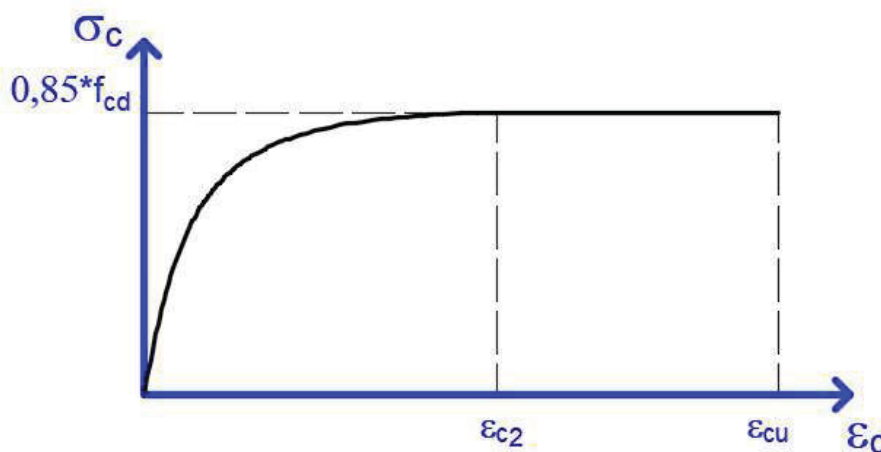
$$n = \begin{cases} 2, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1,4 + 23,4 * \left[\frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4, & \text{se } 50 < f_{ck} < 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação (82)}$$

Onde:

- σ_c : tensão no concreto para a fibra cuja deformação é ε_c ;
- f_{cd} : resistência de cálculo do concreto comprimido;
- f_{ck} : resistência característica do concreto comprimido;
- γ_c : coeficiente redutor de resistência do concreto, adotado com valor igual a 1,4 em todas as análises;
- ε_c : deformação do concreto comprimido em um ponto qualquer;

ε_{c2} : deformação do concreto comprimido a partir da qual a equação da tensão σ_c deixa de ser uma equação polinomial n e passa a ter um valor constante;
 ε_{cu} : deformação última suportada pelo concreto comprimido, a partir da qual ocorre a ruptura por encurtamento excessivo;
 n : coeficiente que depende do valor de f_{ck} .

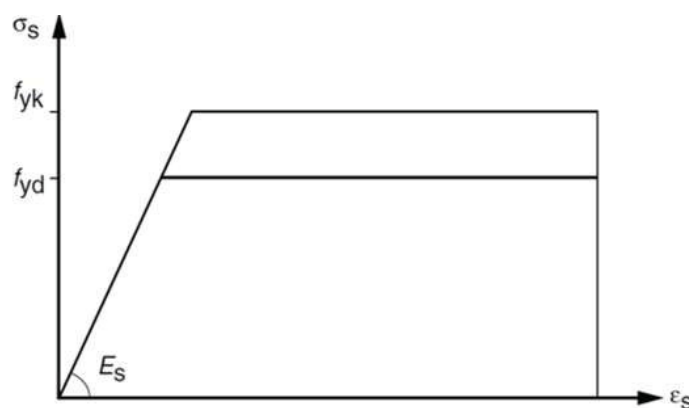
FIGURA 33 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO IDEALIZADO PARA O CONCRETO COMPRIMIDO



FONTE: Adaptado da ABNT NBR 6118/2014.

Para o aço, o diagrama bilinear (FIGURA 34) foi levado em conta para simular o comportamento deste material sob tensões axiais, tanto para a tração quanto para a compressão.

FIGURA 34 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA AÇO DAS ARMADURAS PASSIVAS



FONTE: ABNT NBR 6118/2014.

Onde:

ε_s : deformação axial da barra de aço;
 ε_{su} : deformação axial máxima suportada pelo aço da barra, com valor igual a 1,%;
 E_s : módulo de elasticidade longitudinal do aço, adotado igual a 210 GPa;
 f_{yk} : valor característico da tensão de escoamento do aço (para o aço CA-50, utilizado nos cálculos, o valor é de 500 MPa);

f_{yd} : valor de cálculo da tensão de escoamento do aço, correspondente à divisão de f_{yk} por coeficiente redutor γ_s . Nas análises realizadas, γ_s é igual a 1,15.

2.4.3. Processo de convergência para encontrar curvatura máxima

Esse processo teve por objetivo calcular qual a curvatura máxima suportada pela seção transversal, solicitada por uma linha neutra inclinada segundo um ângulo α e pelo esforço adimensional v . Então, implementou-se um procedimento iterativo, baseado no método da bisseção, até que se encontrasse qual era a máxima curvatura que não levava à ruptura da seção, conforme listado abaixo:

- para a iteração $k=1$, adota-se como valor inicial a curvatura $(1/r)_1 = 2 * (\epsilon_{cu} + \epsilon_{su}) / (y_{asup} - y_{ainf})$;
- verifica-se se a curvatura $(1/r)_k$ leva a seção à ruptura;
- calcula-se qual o valor de $(1/r)_{k+1}$, a ser testado na próxima iteração, conforme a Equação (83):

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{k+1} = \frac{\left[\left(\frac{1}{r}\right)_{sup} + \left(\frac{1}{r}\right)_{inf}\right]}{2} \quad \text{Equação (83)}$$

Onde:

$(1/r)_{sup}$: mínimo valor de curvatura que apresentou ruptura, dentre todos os que foram testados até a iteração k ;
 $(1/r)_{inf}$: máximo valor de curvatura que não apresentou ruptura, dentre todos os que foram testados até a iteração k . Caso todos os valores testados tenham levado à ruptura, $(1/r)_{inf}=0$.

- calcula-se o valor da variação entre $(1/r)_k$ e $(1/r)_{k+1}$ como na Equação (84):

$$\Delta_{\frac{1}{r_k}} = \frac{\left[\left(\frac{1}{r}\right)_{k+1} - \left(\frac{1}{r}\right)_k\right]}{\left[\left(\frac{1}{r}\right)_k\right]} \quad \text{Equação (84)}$$

- se $\Delta_{(1/r)_k}$ for menor ou igual à tolerância máxima estipulada (1%), encerra-se o processo. Se não, incrementa-se o valor de k e volta-se ao passo (b), até que a variação atenda à tolerância.

2.4.4. Geração do diagrama momento-curvatura

Com a curvatura máxima calculada, gerou-se o diagrama momento-curvatura, determinando-se o valor do momento resistente correspondente às curvaturas do intervalo $[0, (1/r)_{\text{máx}}]$. Neste trabalho, foram calculados os valores de momento para 30 curvaturas espaçadas uniformemente dentro desse intervalo.

Os valores dos momentos fletores resistentes resultaram de um processo iterativo que buscou a posição de equilíbrio da linha neutra, como será descrito a seguir.

2.4.5. Processo iterativo para encontrar posição de equilíbrio da linha neutra

Este procedimento foi aplicado para encontrar qual o campo de deformações da seção transversal do pilar que equilibra, ao mesmo tempo, a curvatura $(1/r)$ e o esforço normal solicitante. Assim como no algoritmo que encontra a curvatura máxima suportada pela seção, utilizou-se o método da bisseção até que o erro entre esforço normal resistente calculado e esforço normal solicitante fosse menor que a tolerância. Segue abaixo a sequência empregada:

- a) como dados de entrada, tem-se os valores de N_{sd} (normal solicitante) e $(1/r)$, que é a curvatura aplicada;
- b) aplica-se uma estimativa inicial para a posição da linha neutra ($y_{\alpha LNw}$);
- c) encontram-se as coordenadas das poligonais comprimidas e as deformações das barras de aço;
- d) calculam-se as componentes dos esforços normais resistentes do aço e do concreto;
- e) compara-se o valor do esforço normal resistente (N_{rd}) com N_{sd} . Se o erro entre os 2 valores for menor que a tolerância estipulada (0,5% para este trabalho), a posição de equilíbrio é encontrada, e o valor de M_{rd} (momento resistente) pode ser calculado. Caso contrário, incrementa-se w e arbitra-se um novo valor para y_{LNw} .

Nas iterações $w=1$ e $w=2$, os valores $y_{LN1}=y_{\alpha LNsup}$ e $y_{\alpha LN2}=-\infty$ foram arbitrados, pois sabia-se que a solução estava nesse intervalo. Tal constatação

pode ser feita partindo do pressuposto que a posição de equilíbrio da linha neutra está entre a coordenada que gere compressão uniforme na seção ($-\infty$) e a coordenada que proporcione ausência de tensões de compressão na seção ($y_{\alpha LNsup}$). Com isso estabelecido, o método da bisseção foi aplicado para reduzir sucessivamente o intervalo que contém a solução do problema.

2.2.1. Cálculo de esforços no concreto comprimido

A rotina computacional desenvolvida nesta dissertação calcula os esforços resistentes no concreto comprimido por meio dos seguintes procedimentos:

- a) cálculo da coordenada $y_{\alpha \varepsilon c2}$ para a combinação $(\alpha, 1/r, y_{\alpha LN})$ pela Equação (85), correspondente à coordenada rotacionada y_{α} , onde estão as fibras com deformação de compressão ε_{c2} ;

$$y_{\alpha \varepsilon c2} = y_{\alpha LN} + \frac{\varepsilon_{c2}}{\left(\frac{1}{r}\right)} \quad \text{Equação (85)}$$

- b) obtenção das coordenadas das poligonais comprimidas para cada combinação $(\alpha, y_{\alpha LN})$;
- c) integração das tensões sobre a área das poligonais comprimidas;
- d) verificação das deformações máximas para identificar casos em que há ruptura por encurtamento excessivo.

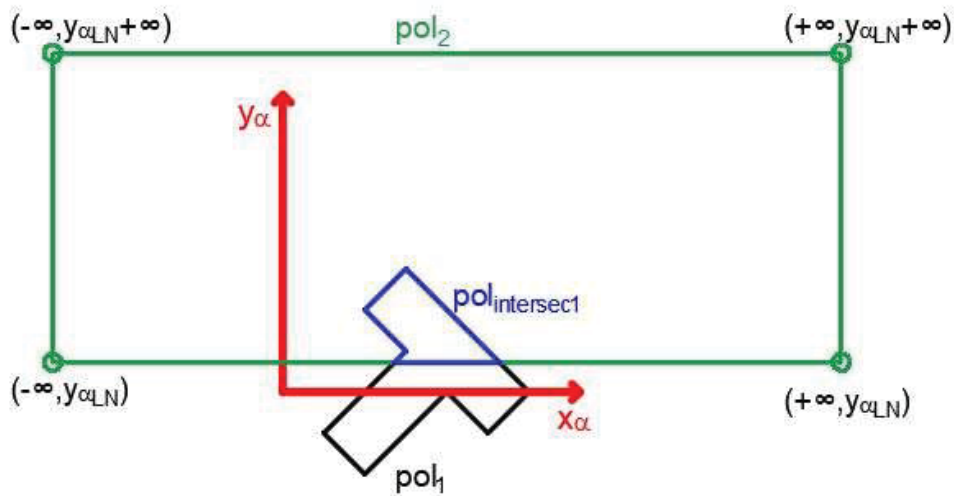
2.2.1.1. Obtenção das coordenadas das poligonais comprimidas

Dadas as coordenadas dos vértices da seção transversal, a inclinação da linha neutra e sua posição $y_{\alpha LN}$, é possível encontrar as coordenadas dos vértices das áreas poligonais que se encontram comprimidas.

No *script* computacional criado para este trabalho, utilizou-se a ferramenta “*geometry.polygon.intersection*”, do pacote “*shapely*” do Python, desenvolvido por Gillies (2017). Esta ferramenta encontra a área de intersecção entre dois polígonos e retorna as coordenadas dos vértices ordenadas no sentido horário. No caso de seções que apresentam concavidades, como é o caso das seções Cruz, L e T, a função retorna as coordenadas separadas por poligonal comprimida, quando mais de uma área é gerada.

Pode-se observar na FIGURA 35 um exemplo gráfico de processamento das coordenadas pela função descrita acima. A lógica consiste em fornecer as coordenadas rotacionadas (x_α , y_α) de todos os vértices da seção original do pilar (polígono 1) e as coordenadas de outro polígono de 4 vértices que represente uma região infinita acima da linha neutra (polígono 2), assim como disposto na Equação (86) e na Equação (87).

FIGURA 35 - INTERSECÇÃO DE POLÍGONOS PELO MÓDULO *SHAPELY*, DE GILLIES (2017)



FONTE: O autor (2017).

$$[pol_1] = \begin{bmatrix} x_{\alpha_1} & y_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} & y_{\alpha_2} \\ \dots & \dots \\ x_{\alpha_{n_{vert}}} & y_{\alpha_{n_{vert}}} \end{bmatrix}_{n_{vert} \times 2} \quad \text{Equação (86)}$$

$$[pol_2] = \begin{bmatrix} -\infty & y_{\alpha_{LN}} \\ +\infty & y_{\alpha_{LN}} \\ +\infty & y_{\alpha_{LN}} + \infty \\ -\infty & y_{\alpha_{LN}} + \infty \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \text{Equação (87)}$$

Assim, a intersecção entre $[pol_1]$ e $[pol_2]$ fornece como resultado um conjunto de matrizes da Equação (88), com as coordenadas dos vértices de um ou mais polígonos $[pol_{intersec}]$, os quais representam a região comprimida da seção original do pilar.

$$\{pol_{intersec}\} = \{[pol_{intersec_1}], [pol_{intersec_2}], \dots, [pol_{intersec_{n_{pol}}}] \}_{n_{pol}} \quad \text{Equação (88)}$$

Onde:

[pol₁]: matriz com coordenadas dos vértices da seção transversal rotacionadas para ângulo α ;
 [pol₂]: matriz com coordenadas dos vértices de polígono de lados de tamanho infinito, cuja aresta inferior coincide com a coordenada $y_{\alpha LN}$ da linha neutra;
 {pol_{intersec}}: lista com matrizes que contém as coordenadas dos vértices das poligonais comprimidas;
 n_{vert}: número de vértices da seção transversal;
 n_{pol}: número de áreas poligonais comprimidas geradas pela intersecção entre pol₁ e pol₂.

2.2.1.2. Integração das tensões sobre as áreas das poligonais comprimidas

Utilizou-se a integração numérica de Gauss-Legendre sobre áreas triangulares, com o intuito de calcular o valor da resultante de compressão e de sua posição de aplicação em cada área poligonal comprimida. A teoria de integração numérica utilizada foi a formulada por Deng (2010).

Primeiramente, a poligonal comprimida foi dividida em uma malha triangular, com o auxílio do pacote “*meshpy*” do Python, criado por Klöckner (2017), que contém a ferramenta “*meshpy.triangle*”. A geração da malha foi controlada a partir de uma área máxima para os triângulos, definida neste trabalho como 10 cm². Obteve-se, assim, o vetor “{tri}”, conforme a Equação (89). Esse vetor contém n_{tri} matrizes [tri] de dimensões 3x2, no formato mostrado pela Equação (90).

$$\{tri\}_{n_{tri}} = \{[tri]_1, [tri]_2, \dots, [tri]_t, \dots, [tri]_{n_{tri}}\} \quad \text{Equação (89)}$$

$$[tri]_t = \begin{bmatrix} x_{\alpha t,1} & y_{\alpha t,1} \\ x_{\alpha t,2} & y_{\alpha t,2} \\ x_{\alpha t,3} & y_{\alpha t,3} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{Equação (90)}$$

Onde:

{tri}: vetor que contém as matrizes com as coordenadas dos triângulos gerados pela malha;
 [tri]_t: matriz que contém as coordenadas do triângulo “t” da malha gerada;
 n_{tri}: número de triângulos gerados pela malha aplicada sobre a área poligonal;
 t: contador do número de triângulos.

Sabe-se também que, para um determinado ângulo α de rotação da linha neutra, uma posição de linha neutra $y_{\alpha LN}$ e um valor $(1/r)$ para a curvatura, a resultante de compressão no concreto e sua posição de aplicação podem ser calculados pela Equação (91) e pela Equação (92), respectivamente.

$$R_{cd} = \sum_{i=1}^{n_{pol}} \int_{A_{pol,i}} \sigma_c * dA \quad \text{Equação (91)}$$

$$y_{\alpha R_{cd}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{pol}} \int_{A_{pol,i}} y_{\alpha} * \sigma_c * dA}{R_{cd}} \quad \text{Equação (92)}$$

Onde:

R_{cd} : valor da resultante de compressão no concreto;
 $A_{pol,i}$: área da i-ésima poligonal comprimida;
 $y_{\alpha, R_{cd}}$: ponto de aplicação de R_{cd} .

E, como a área da i-ésima poligonal foi dividida em n_{tri} áreas triangulares, as integrais da Equação (91) e da Equação (92) tomam a forma apresentada a seguir:

$$\int_{A_{pol,i}} \sigma_c * dA = \sum_{t=1}^{n_{tri}} \int_{A_{tri,t}} \sigma_c * dA \quad \text{Equação (93)}$$

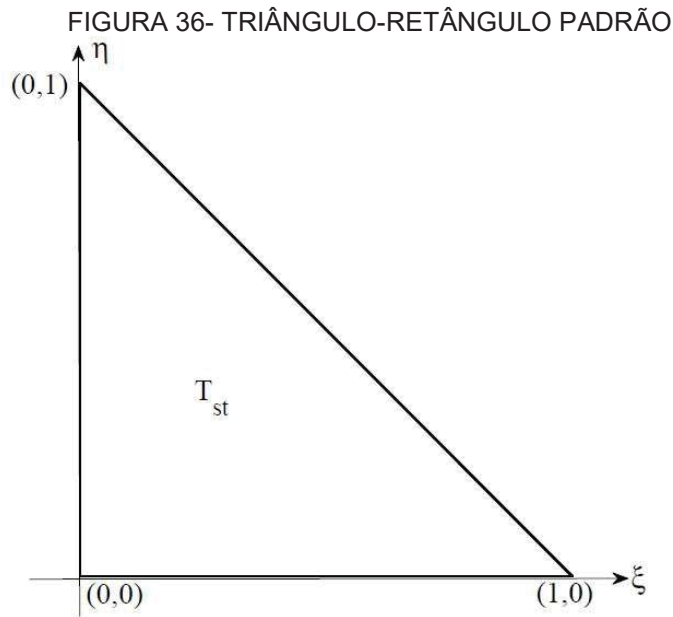
$$\int_{A_{pol,i}} y_{\alpha} * \sigma_c * dA = \sum_{t=1}^{n_{tri}} \int_{A_{tri,t}} y_{\alpha} * \sigma_c * dA \quad \text{Equação (94)}$$

$$\int_{A_{pol,i}} x_{\alpha} * \sigma_c * dA = \sum_{t=1}^{n_{tri}} \int_{A_{tri,t}} x_{\alpha} * \sigma_c * dA \quad \text{Equação (95)}$$

Onde:

$A_{tri,t}$: área do t-ésimo triângulo da malha gerada.

Sendo assim, observou-se que as integrais podiam ser resolvidas como o somatório de integrais sobre áreas triangulares, o que possibilitou uma resolução de maneira simples pela Quadratura de Gauss-Legendre. Esta solução pode ser compreendida quando se observa primeiramente um triângulo-retângulo padrão (T_{st}), com catetos medindo a unidade, representado no domínio local (ξ, η) , conforme a FIGURA 36. Nesse triângulo, a integral de uma função qualquer sobre sua área é escrita na forma aproximada da Equação (96).



FONTE: Deng (2010).

$$\iint_{A_{T_{st}}} g(\xi, \eta) * d\xi * d\eta = 0,5 * \sum_{i=1}^{N_{pg}} w_i * g(\xi_i, \eta_i) \quad \text{Equação (96)}$$

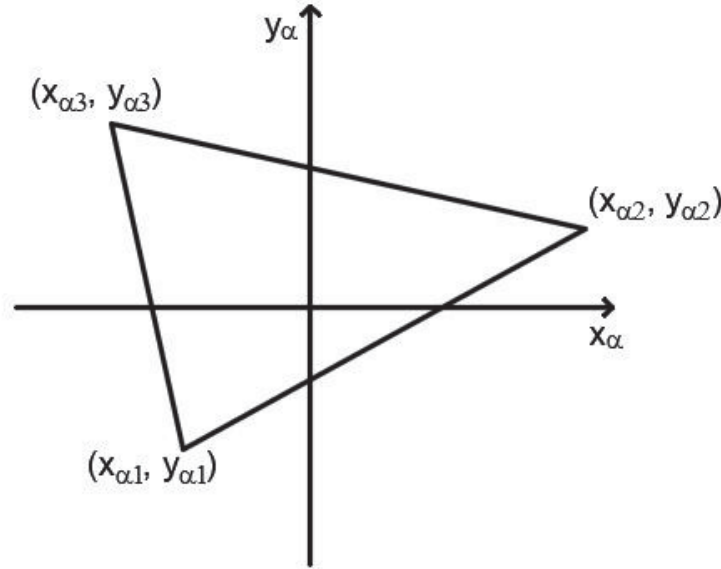
Onde:

$A_{T_{st}}$: área do triângulo padrão;
 (ξ, η) : domínio local do triângulo padrão;
 $g(\xi, \eta)$: função qualquer a ser integrada sobre a área do triângulo padrão;
 i : contador dos pontos de Gauss;
 N_{pg} : número de pontos de Gauss;
 w_i : pesos de Gauss;
 (ξ_i, η_i) : pontos de Gauss.

Já em um triângulo qualquer, como o da FIGURA 37, pode-se calcular a integral de uma função $f(x_\alpha, y_\alpha)$ sobre sua área utilizando como base o triângulo padrão T_{st} , como na Equação (97). Contudo isso é possível desde que se realize a devida interpolação das coordenadas, trazendo a integração para o domínio

(ξ, η) , conforme a Equação (98). Para tal, utiliza-se a matriz jacobiana da Equação (99).

FIGURA 37- TRIÂNGULO GENÉRICO



FONTE: Adaptado de DENG (2010).

$$I = \iint f(x_\alpha, y_\alpha) * dx_\alpha * dy_\alpha \quad \text{Equação (97)}$$

$$I = \iint_{A_{tst}} f(x_\alpha(\xi, \eta), y_\alpha(\xi, \eta)) * |J(\xi, \eta)| * d\xi * d\eta \quad \text{Equação (98)}$$

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi} & \frac{\partial y_\alpha}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta} & \frac{\partial y_\alpha}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Equação (99)}$$

Onde:

I: integral da função $f(x_\alpha, y_\alpha)$ sobre a área do triângulo qualquer;

$J(\xi, \eta)$: matriz jacobiana de interpolação das coordenadas (x_α, y_α) no domínio (ξ, η) .

O mapeamento linear das coordenadas (x_α, y_α) no domínio (ξ, η) foi feito com o uso das 3 funções de forma mostradas na Equação (100), na Equação (101) e na Equação (102). Assim, chega-se à Equação (103) e à Equação (104), que indicam as variáveis x_α e y_α escritas em função de (ξ, η) .

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad \text{Equação (100)}$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad \text{Equação (101)}$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad \text{Equação (102)}$$

$$x_\alpha(\xi, \eta) = x_{\alpha_1} * N_1(\xi, \eta) + x_{\alpha_2} * N_2(\xi, \eta) + x_{\alpha_3} * N_3(\xi, \eta) \quad \text{Equação (103)}$$

$$y_\alpha(\xi, \eta) = y_{\alpha_1} * N_1(\xi, \eta) + y_{\alpha_2} * N_2(\xi, \eta) + y_{\alpha_3} * N_3(\xi, \eta) \quad \text{Equação (104)}$$

Onde:

N_1, N_2, N_3 : funções de forma nodais utilizadas para interpolação linear das coordenadas.

Observa-se também na Equação (105) que o determinante da matriz Jacobiana é igual a duas vezes a área do triângulo qualquer mostrada na Equação (106).

$$|J(\xi, \eta)| = 2 * A_{tri_t} \quad \text{Equação (105)}$$

$$A_{tri_t} = \frac{x_{\alpha_1} * (y_{\alpha_2} - y_{\alpha_3}) + x_{\alpha_2} * (y_{\alpha_3} - y_{\alpha_1}) + x_{\alpha_3} * (y_{\alpha_1} - y_{\alpha_2})}{2} \quad \text{Equação (106)}$$

Assim, a integral sobre a área do triângulo qualquer assume a forma apresentada na Equação (107), cuja formulação foi empregada na rotina computacional desenvolvida.

$$I = A_{tri_t} * \sum_{i=1}^N w_i * f(x_\alpha(\xi_i, \eta_i), y_\alpha(\xi_i, \eta_i)) \quad \text{Equação (107)}$$

Nesse trabalho, a função $f(x_\alpha, y_\alpha)$ é igual a $\sigma_c(x_\alpha, y_\alpha)$ para o cálculo da resultante de compressão e é igual a $y_\alpha * \sigma_c(x_\alpha, y_\alpha)$ para o cálculo do ponto de aplicação. Quando colocada no item 2.2.1, a função σ_c foi escrita em termos da deformação da fibra comprimida, contudo a mesma equação é transformada

para que fique em função da coordenada y_α , como na Equação (108), e assim possa ser integrada usando a Equação (107).

$$\sigma_c = \begin{cases} \alpha_c * f_{cd} * \left\{ 1 - \left[1 - (y_\alpha - y_{\alpha_{LN}}) * \frac{1}{\varepsilon_{c2}} \right]^n \right\}, & \text{se } y_\alpha \leq y_{\varepsilon_{c2}} \\ \alpha_c * f_{cd}, & \text{se } y_\alpha > y_{\varepsilon_{c2}} \end{cases} \quad \text{Equação (108)}$$

A precisão dos resultados da integral da Equação (107) depende do número de pontos de Gauss escolhidos no triângulo padrão (T_{st}) e a escolha deste número (N) pode ser associada ao grau do polinômio que está sendo integrado. Nessa dissertação de mestrado, o grau máximo que a função $f(x_\alpha, y_\alpha) = y_\alpha * \sigma_c$ pode assumir é 3 (polinômio cúbico). Por isso, optou-se por calcular todas as integrais utilizando 4 pontos de Gauss, conforme recomenda a literatura para uma equação de 3º grau. As matrizes com os pontos e pesos de Gauss utilizados na implementação do trabalho estão colocadas na Equação (109) e na Equação (110), respectivamente.

$$[\xi_i, \eta_i] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad \text{Equação (109)}$$

$$[w_i] = \begin{bmatrix} -27/48 \\ 25/48 \\ 25/48 \\ 25/48 \end{bmatrix} \quad \text{Equação (110)}$$

2.2.2. Cálculo de esforços nas barras de aço

Em uma determinada combinação ($\alpha, 1/r, y_{\alpha_{LN}}$), a deformação da b-ésima barra de aço da seção transversal é dada pela Equação (111), que corresponde à tensão σ_{sb} calculada pela Equação (112), com base na deformação de escoamento da Equação (113).

$$\varepsilon_{sb} = (y_{\alpha_b} - y_{\alpha_{LN}}) * \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{Equação (111)}$$

$$\sigma_{sb} = \begin{cases} E_s * \varepsilon_{sb}, & \text{se } |\varepsilon_{sb}| \leq \varepsilon_{se} \\ f_{yd}, & \text{se } \varepsilon_{se} < |\varepsilon_{sb}| < \varepsilon_{su} \end{cases} \quad \text{Equação (112)}$$

$$\varepsilon_{se} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{Equação (113)}$$

Onde:

ε_{sb} : deformação da b-ésima barra de aço;
 $y_{\alpha b}$: coordenada y_{α} do centroide da b-ésima barra de aço;
 σ_{sb} : tensão axial de tração ou compressão na b-ésima barra de aço;
 E_s : módulo de elasticidade do aço;
 f_{yd} : tensão de escoamento de cálculo do aço da barra;
 ε_{se} : deformação de escoamento do aço da barra;
 ε_{su} : deformação última do aço da barra.

Com o valor da tensão axial na barra e considerando que essa tensão é uniforme ao longo de toda a sua área, chegou-se aos valores da resultante axial pela Equação (114) e do momento fletor resistente pela Equação (115).

$$R_{sb} = \sigma_{sb} * A_{sb} \quad \text{Equação (114)}$$

$$M_{sb} = (y_{\alpha b} - y_{\alpha cg}) * R_{sb} + (x_{\alpha b} - x_{\alpha cg}) * R_{sb} \quad \text{Equação (115)}$$

Onde:

R_{sb} : resultante axial da b-ésima barra de aço;
 A_{sb} : área da seção transversal da b-ésima barra de aço;
 $x_{\alpha cg}, y_{\alpha cg}$: coordenadas x_{α}, y_{α} do centroide da seção transversal.

Então, somando os esforços resistentes de todas as barras de aço da seção, calculou-se o esforço normal e o momento fletor resistidos pelo aço da seção transversal partindo da Equação (116) e da Equação (117).

$$N_{srd} = \sum_{b=1}^{n_b} R_{sb} \quad \text{Equação (116)}$$

$$M_{srd} = \sum_{b=1}^{n_b} M_{sb} \quad \text{Equação (117)}$$

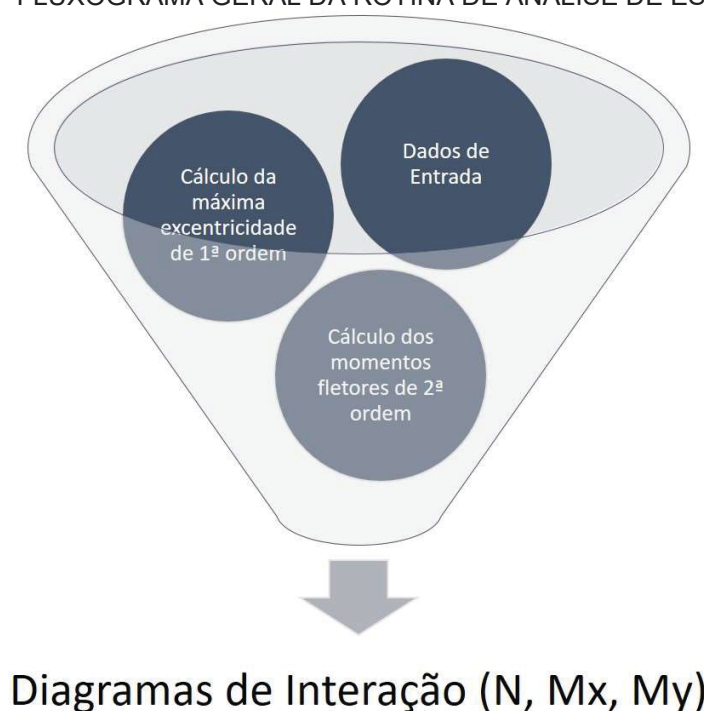
Onde:

N_{srd} : esforço normal resistido pelo conjunto de barras de aço da seção transversal;
 M_{srd} : momento fletor resistido pelo conjunto de barras de aço da seção transversal;
 n_b : número de barras da seção transversal.

2.5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

A análise de estabilidade aplicada aos modelos de pilares teve como princípio o cálculo dos máximos esforços de primeira ordem (N , M_{1x} , M_{1y}) que pudessem ser aplicados às peças sem que houvesse a ruptura de alguma seção transversal após o cálculo dos esforços de segunda ordem. Por sua vez, os esforços de segunda ordem puderam ser calculados com o uso do Método Geral, auxiliado pela Analogia de Mohr. Um entendimento global do processo é mostrado pela FIGURA 38.

FIGURA 38 - FLUXOGRAMA GERAL DA ROTINA DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE



FONTE: O autor (2017).

2.5.1. Dados de entrada

O cálculo de esforços de segunda ordem pelo programa desenvolvido exige os seguintes dados de entrada:

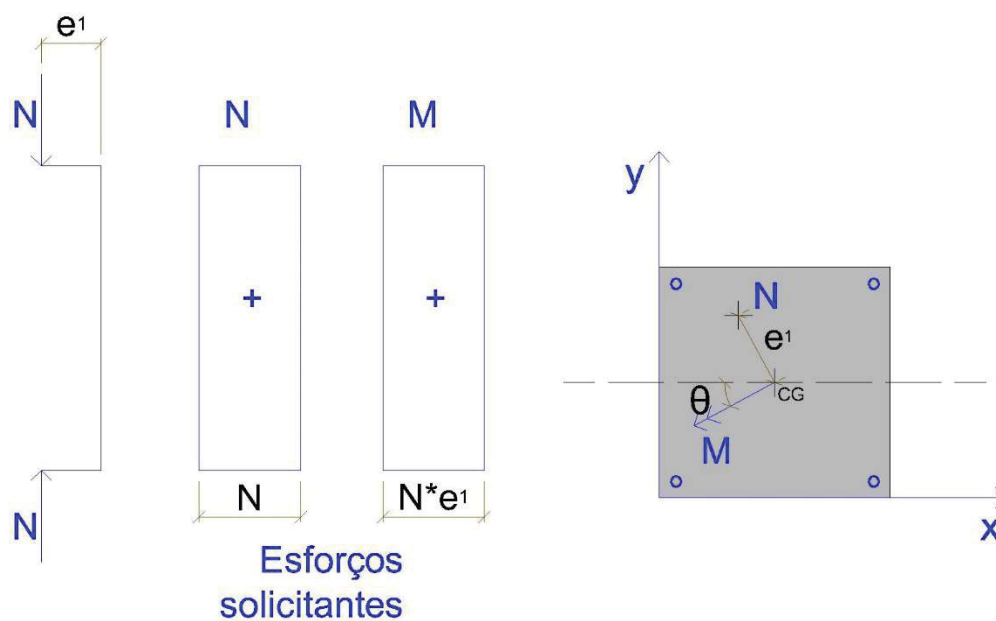
- diagramas Momento-Normal-Curvatura da seção do pilar;
- comprimento L do pilar;

- c) número de seções n_{sec} que serão analisadas ao longo do comprimento L ;
- e) vetor com todos os valores de esforço normal adimensional v que são utilizados como carregamento axial do pilar;
- f) ângulos θ para os quais serão aplicadas as excentricidades de 1ª ordem;
- f) variação máxima aceita para as flechas do pilar entre duas iterações sucessivas, para estabelecer o valor dos momentos de segunda ordem (var_{max});
- g) tolerância máxima para a variação da excentricidade de ruptura.

2.5.2. Esforços de primeira ordem

Os pilares foram submetidos a esforços de primeira ordem uniformes ao longo de todo o comprimento, assim como ilustrado pela FIGURA 39.

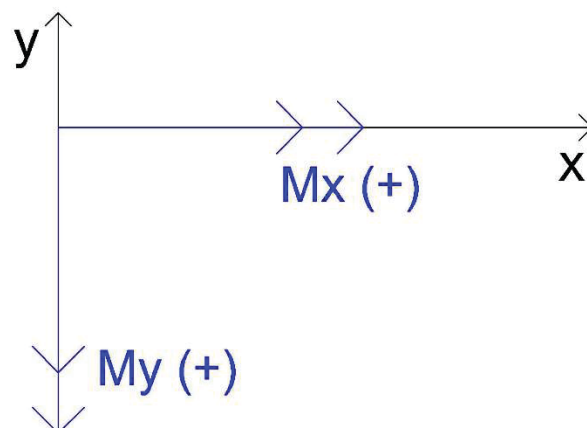
FIGURA 39 - SOLICITAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM NO PILAR.



FONTE: O autor (2017).

Pela convenção de sinais adotada, os momentos positivos são aqueles que tracionam as faces positivas x e y da seção do pilar, conforme a FIGURA 40.

FIGURA 40 - CONVENÇÃO DE SINAIS PARA OS MOMENTOS FLETORES NO PILA.



FONTE: O autor (2017).

Dessa forma, a Equação (118), a Equação (119), a Equação (120) e a Equação (121) mostram como são determinados os esforços de primeira ordem nos pilares.

$$N = \nu * A_c * f_{cd} \quad \text{Equação (118)}$$

$$M_1 = e_1 * N \quad \text{Equação (119)}$$

$$M_{1x} = -M_1 * \cos(\theta) \quad \text{Equação (120)}$$

$$M_{1y} = -M_1 * \sin(\theta) \quad \text{Equação (121)}$$

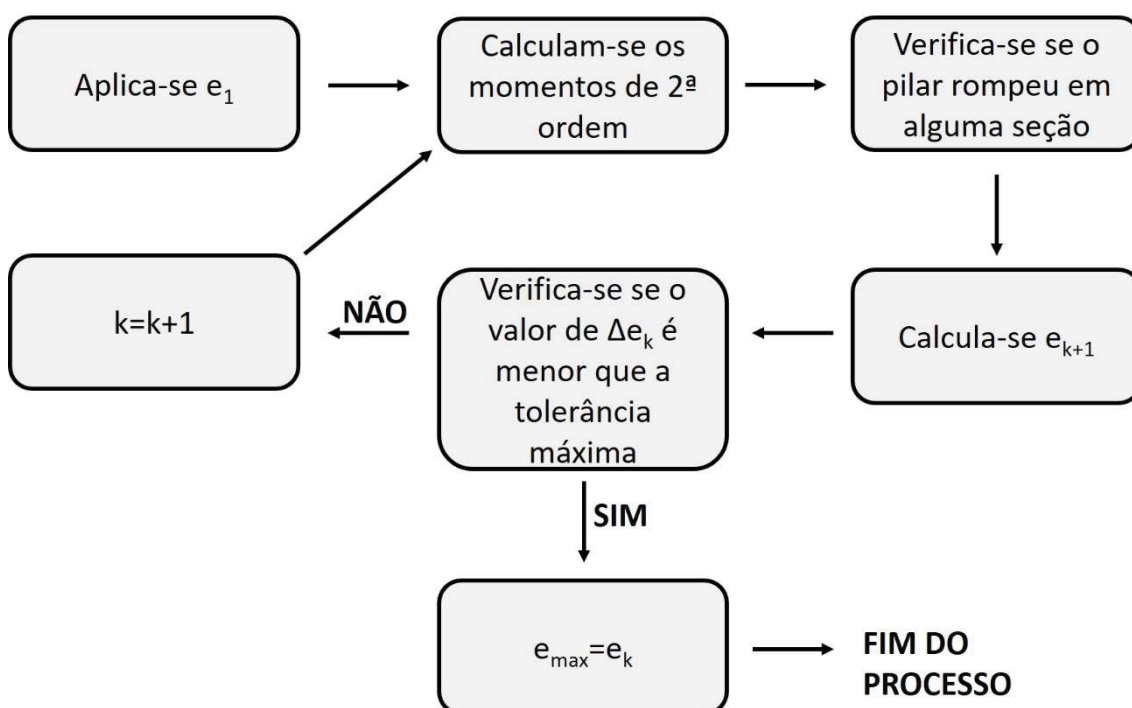
Onde:

e_1 : excentricidade de primeira ordem;
 M_{1x} : momento fletor de primeira ordem em torno do eixo x;
 M_{1y} : momento fletor de primeira ordem em torno do eixo y;
 θ : ângulo formado entre o eixo x e o vetor resultante M_1 .

2.5.3. Cálculo da máxima excentricidade de primeira ordem

Para um ângulo θ e uma normal N solicitantes, o processo consistiu em adaptar o valor da excentricidade aplicada até que coincidissem com a excentricidade máxima de 1ª ordem suportada pela peça. Na FIGURA 41 encontra-se o esquema geral do algoritmo.

FIGURA 41- FLUXOGRAMA DO PASSO ADAPTATIVO PARA CÁLCULO DA MÁXIMA EXCENTRICIDADE DE PRIMEIRA ORDEM



FONTE: O autor (2017).

A convergência do processo depende do cálculo de e_{k+1} (excentricidade aplicada na próxima iteração) e essa estimativa é feita pela Equação (122).

$$e_{k+1} = \begin{cases} 2 * e_k, & \text{se nenhum valor testado levou à ruptura} \\ 0,5 * (e_{k_{inf}} + e_{k_{sup}}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{Equação (122)}$$

Onde:

- k : contador de iterações, que começa em 1;
- e_k : excentricidade de primeira ordem testada na iteração k ;
- e_{k+1} : excentricidade de primeira ordem a ser testada na iteração $k+1$;
- $e_{k_{inf}}$: máximo valor de excentricidade testado até a iteração k que não levou à ruptura;
- $e_{k_{sup}}$: mínimo valor de excentricidade testado até a iteração k que levou à ruptura.

Como critério de parada, utilizou-se a variação relativa de excentricidade Δe_k , testada entre 2 iterações consecutivas, que deve ser menor que 1%, como mostra a Equação (123). Quando isso ocorre, o processo é interrompido e a

excentricidade máxima de primeira ordem que o pilar suporta sem romper será e_k .

$$\Delta e_k = \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} \leq 1\% \quad \text{Equação (123)}$$

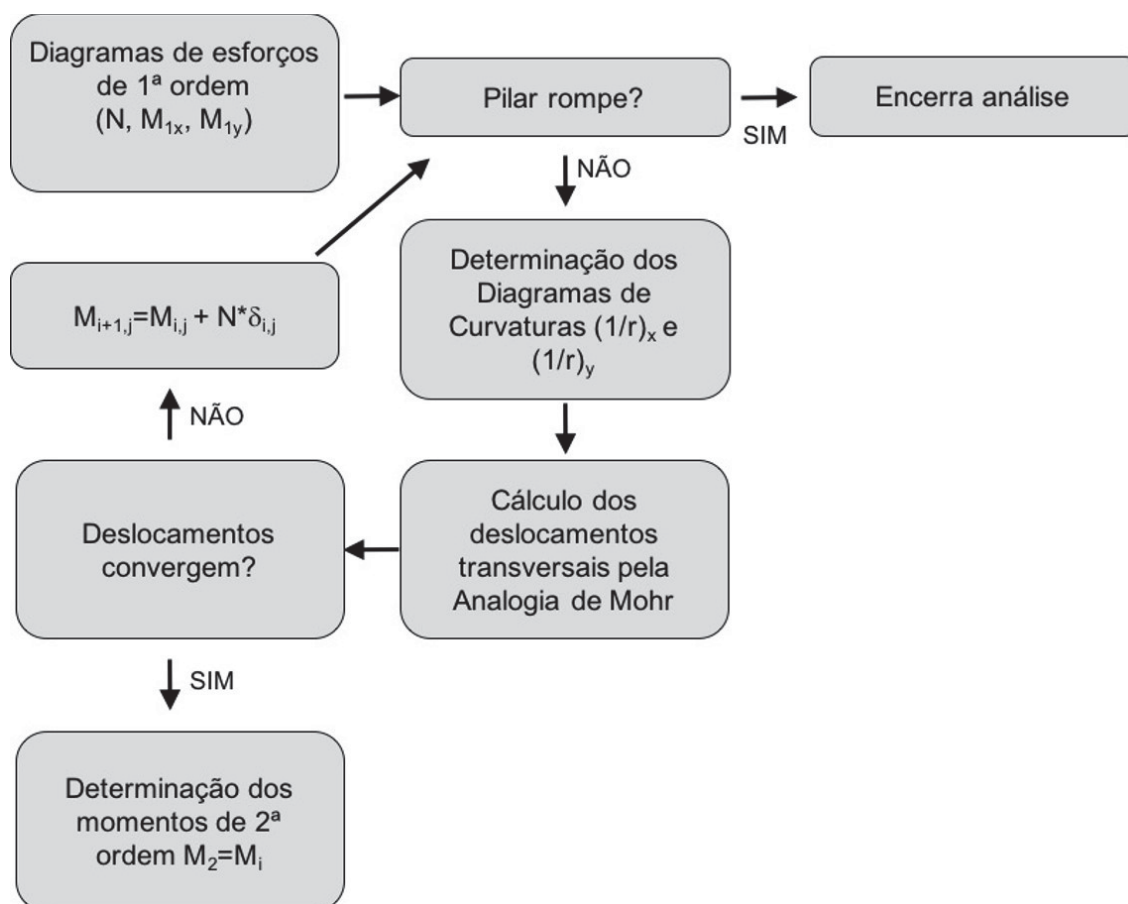
Onde:

Δe_k : variação entre excentricidades de 2 iterações consecutivas.

2.5.4. Esforços de segunda ordem

Como descrito anteriormente, o valor dos esforços de segunda ordem foi calculado por meio do Método Geral, associado com a Analogia de Mohr. Trata-se de um procedimento iterativo de convergência de deslocamentos, cujo algoritmo encontra-se representado na FIGURA 42.

FIGURA 42 - FLUXOGRAMA DE CÁLCULO DOS ESFORÇOS DE 2ª ORDEM



FONTE: O autor (2017).

2.5.4.1. Determinação das curvaturas nas seções

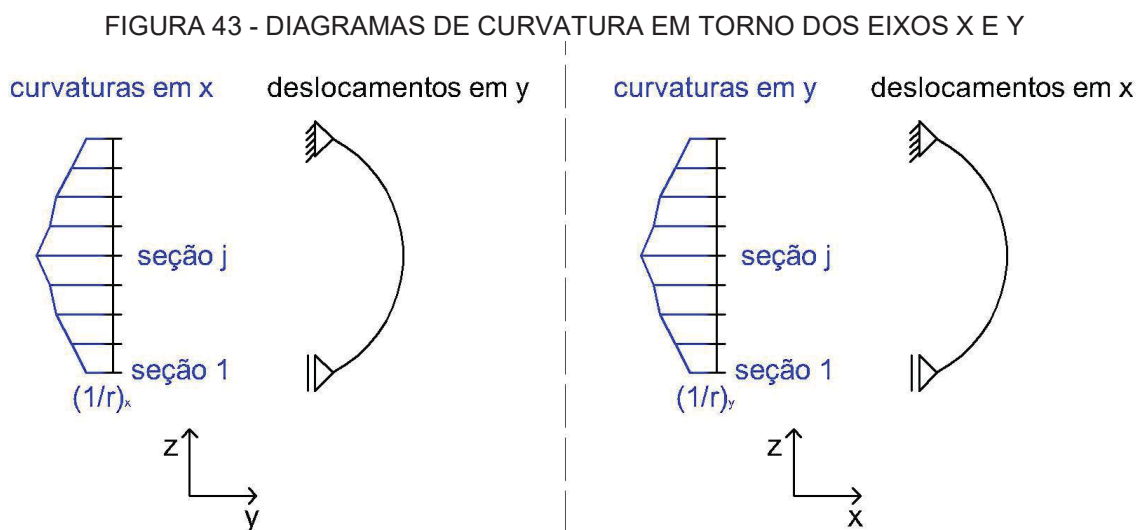
As curvaturas de cada seção j do pilar são determinadas a partir de uma busca nos diagramas momento-normal-curvatura, utilizando como dados de entrada o ângulo θ de inclinação da linha neutra, o esforço normal N e o valor do momento fletor $M_j = (M_{x,j}^2 + M_{y,j}^2)^{1/2}$. O valor da curvatura resulta de um processo de interpolação linear do ângulo α_j e do momento M_j .

É interessante observar que a precisão da interpolação linear realizada será maior quanto menores os intervalos $\Delta\alpha$, definidos no item 2.2.1. Ou seja, quanto mais refinada a discretização dos ângulos, melhor será a precisão da análise de segunda ordem no que diz respeito aos deslocamentos transversais.

Em todos os modelos analisados, optou-se por manter o valor $\Delta\alpha$ igual a 0,5 graus. Este intervalo foi escolhido para tornar o tempo de processamento computacional viável, ao mesmo tempo que mantém uma boa precisão na interpolação.

2.5.4.2. Cálculo dos deslocamentos transversais pela Analogia de Mohr

Partindo dos diagramas de curvaturas das seções em torno de x e y (FIGURA 43), foi possível computar o valor dos deslocamentos transversais do pilar por meio da Analogia de Mohr.



FONTE: O autor (2017).

Para tanto, a primeira etapa foi definir um pilar análogo que proporcionasse resultados compatíveis com as condições de contorno do pilar

original. Como os vínculos do pilar original em $z=0$ e em $z=L$ eram apoios simples nas direções x e y , sabia-se que os deslocamentos (δ_x) e (δ_y) eram nulos em $z=0$ e em $z=L$, e que as rotações (ϕ_x) e (ϕ_y) eram diferentes de zero em $z=0$ e $z=L$. Assim, o pilar análogo devia ter vínculos que proporcionassem momentos nulos e esforços cortantes não nulos nas extremidades das barras. Concluiu-se, então, que esses vínculos análogos também eram apoios rotulados em x e y .

Adiante, é demonstrado o procedimento que foi realizado para calcular os deslocamentos transversais paralelos a x (o mesmo processo também vale para se chegar às flechas na direção y).

No pilar análogo, aplicam-se as curvaturas $(1/r)_{y,j}$ como “carregamento” na barra, assumindo que os valores variam linearmente entre as seções. A “resultante do carregamento” em cada trecho j entre as seções j e $j+1$ pode ser escrita conforme a Equação (124), na qual o comprimento l_j de cada trecho é calculado pela Equação (125).

$$q_j = \frac{\left[\left(\frac{1}{r} \right)_{y,j} + \left(\frac{1}{r} \right)_{y,j+1} \right]}{2} * l_j \quad \text{Equação (124)}$$

$$l_j = \frac{L}{n_{sec} - 1} \quad \text{Equação (125)}$$

Onde:

- q_j : “resultante de carregamento” no trecho j , entre a seção j e a seção $j+1$;
- $(1/r)_{y,j}$: curvatura em torno de y da seção j ;
- $(1/r)_{y,j+1}$: curvatura em torno de y da seção $j+1$;
- l_j : comprimento de cada trecho do pilar;
- L : comprimento total do pilar;
- n_{sec} : número de seções do pilar.

Com o uso da Equação (126), calculam-se as coordenadas locais ζ_{qi} de aplicação da “resultante de carregamento” em cada trecho do pilar análogo. Em seguida, pela Equação (127) chega-se às cotas globais z_{qi} do ponto de aplicação de cada “resultante de carregamento”. E, com a soma das “resultantes” em todos os trechos, obtém-se o valor da “resultante total de carregamentos”, como mostrado pela Equação (128).

$$\zeta_{q_j} = \frac{\left\{ 0.5 * l_j^2 * \left(\frac{1}{r}\right)_{y_j} + \left(\frac{2}{3}\right) * 0.5 * l_j^2 * \left[\left(\frac{1}{r}\right)_{y_{j+1}} - \left(\frac{1}{r}\right)_{y_j}\right] \right\}}{q_j} \quad \text{Equação (126)}$$

$$z_{q_j} = z_j + \zeta_{q_j} \quad \text{Equação (127)}$$

$$Q = \sum_{j=1}^{n_{sec}-1} q_j \quad \text{Equação (128)}$$

Onde:

ζ_{qj} : coordenada local em cada trecho j, para o ponto de aplicação do “carregamento” q_j , variando de 0 a l_j ;
 z_{qj} : coordenada z do ponto de aplicação do “carregamento” q_j ;
 z_j : coordenada z da seção j;
 Q : “resultante total de carregamentos” aplicados ao longo de todo o pilar.

Com todos os “carregamentos” e respectivos pontos de aplicação determinados, utilizam-se a Equação (129) e a Equação (130), de equilíbrio estático, para determinar as “reações de apoio” em $z=0$ e em $z=L$.

$$R_{(z=L)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{sec}-1} (q_j * z_{q_j})}{L} \quad \text{Equação (129)}$$

$$R_{(z=0)} = -R_{(z=L)} - Q \quad \text{Equação (130)}$$

Onde:

$R_{(z=0)}$: “reação de apoio” em $z=0$;
 $R_{(z=L)}$: “reação de apoio” em $z=L$.

Dessa maneira, é possível calcular pela Equação (131) o valor dos “momentos fletores” em todas as seções do pilar análogo, que correspondem ao valor dos deslocamentos transversais nas seções do pilar original.

$$\delta_{x_j} = m_j = -R_{(z=0)} * z_j + \sum_{u=1}^{j-1} -q_u * z_{q_u} \quad \text{Equação (131)}$$

Onde:

- m_j : “momento fletor” na seção j , correspondente ao deslocamento transversal δ_{xj} no pilar original;
 u : contador do número de trechos até a seção j ;
 δ_{xj} : deslocamento transversal paralelo a x na seção j do pilar original.

2.5.4.3. Verificação de convergência dos deslocamentos

O critério de parada estabelecido para encontrar os esforços de segunda ordem foi a variação dos deslocamentos transversais entre duas iterações sucessivas, calculada segundo os eixos x e y pela Equação (132) e pela Equação (133). Os deslocamentos estabilizam a partir do momento em que a variação dos mesmos em todas as seções ($\Delta\delta_r$), calculado conforme a Equação (134), passa a ser menor que o valor máximo estipulado ($\Delta\delta_{max}$), como indica a Equação (135).

$$\Delta\delta_{x_{jr}} = \frac{(\delta_{x_{jr}} - \delta_{x_{jr-1}})}{\delta_{x_{jr-1}}} \quad \text{Equação (132)}$$

$$\Delta\delta_{y_{jr}} = \frac{(\delta_{y_{jr}} - \delta_{y_{jr-1}})}{\delta_{y_{jr-1}}} \quad \text{Equação (133)}$$

$$\Delta\delta_r = \text{máximo} \begin{cases} \text{máximo } (\Delta\delta_{x_{jr}})_{j=1}^{j=n_{sec}} \\ \text{máximo } (\Delta\delta_{y_{jr}})_{j=1}^{j=n_{sec}} \end{cases} \quad \text{Equação (134)}$$

$$\text{se } \Delta\delta_r \leq \Delta\delta_{max} \rightarrow \text{convergência atingida} \quad \text{Equação (135)}$$

Onde:

- δ_{xjr} , δ_{yjr} : deslocamentos transversais da j -ésima seção do pilar na r -ésima iteração;
 $\Delta\delta_{xjr}$, $\Delta\delta_{yjr}$: variação de deslocamentos transversais da j -ésima seção do pilar, entre as iterações r e $(r-1)$;
 $\Delta\delta_r$: variação de deslocamentos máxima da iteração r entre todas as seções.

$\Delta\delta_{\max}$: variação máxima de deslocamentos para que o processo iterativo pare. Neste trabalho, adota-se o valor de 1%.

Caso não aconteça a convergência na etapa r , incrementa-se $r=r+1$, e os momentos fletores nas seções ficam conforme a Equação (136) e a Equação (137).

$$M_{x_{jr}} = M_{1x_j} + N * \delta_{y_{jr-1}} \quad \text{Equação (136)}$$

$$M_{y_{jr}} = M_{1y_j} + N * \delta_{x_{jr-1}} \quad \text{Equação (137)}$$

Onde:

$\delta_{xj,r-1}$, $\delta_{yj,r-1}$: deslocamentos transversais da j -ésima seção na iteração $r-1$;
 M_{xjr} , M_{yjr} : momentos fletores da j -ésima seção na iteração r ;
 M_{1xj} , M_{1yj} : momentos fletores de primeira ordem da j -ésima seção.

Em caso de convergência dos deslocamentos na iteração r , chega-se ao valor dos momentos de segunda ordem nas seções, como estabelecem a Equação (138) e a Equação (139).

$$M_{2x_j} = M_{x_{jr}} \quad \text{Equação (138)}$$

$$M_{2y_j} = M_{y_{jr}} \quad \text{Equação (139)}$$

Por último, os máximos momentos de segunda ordem suportados pelo pilar como um todo são calculados como a Equação (140) e a Equação (141) demonstram.

$$M_{2x} = \text{máximo}(M_{2x_j})_{j=1}^{j=n_{sec}} \quad \text{Equação (140)}$$

$$M_{2y} = \text{máximo}(M_{2y_j})_{j=1}^{j=n_{sec}}$$

Equação
(141)

Onde:

M_{2xj} , M_{2yj} : momentos de segunda ordem da j-ésima seção;
 M_{2x} , M_{2y} : momentos máximos de segunda ordem do pilar.

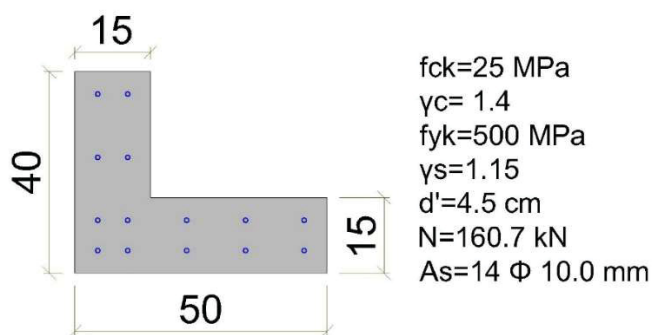
2.6. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO

Para atestar a validade do código desenvolvido, foram utilizados os exemplos dos trabalhos de Ceccon (2008), no caso da flexão oblíqua de uma seção isolada, e de Torrico (2010) para a análise de estabilidade.

2.6.1. EXEMPLO 1

O primeiro exemplo tratou do pilar de seção L ilustrado na FIGURA 44, que foi resolvido por Ceccon (2008). O objetivo foi gerar um diagrama de interação (M_x - M_y) para a seção transversal, dada a configuração abaixo.

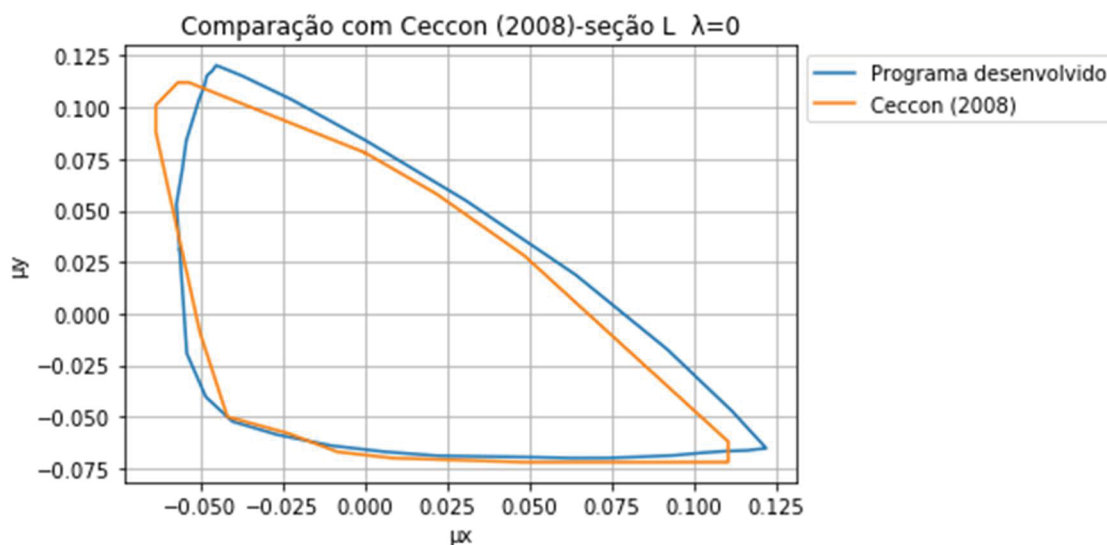
FIGURA 44 - SEÇÃO POLIGONAL EM L PARA VALIDAÇÃO DO CÓDIGO



FONTE: O autor (2017).

Após o processamento da seção pelo código desenvolvido, foi possível sobrepor o diagrama de interação resultante com o que foi apresentado por Ceccon (2008), conforme a FIGURA 45. Houve uma coerência entre os dois resultados e as divergências encontradas aconteceram devido às diferentes formulações adotadas nos dois trabalhos, principalmente no que diz respeito à integração do diagrama parábola-retângulo. No caso de Ceccon (2008), a integração foi feita de maneira simplificada, como sugere o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118/2014 (substituição do diagrama parábola-retângulo por um retângulo equivalente).

FIGURA 45 - COMPARAÇÃO COM RESULTADO DE CECCON (2008)

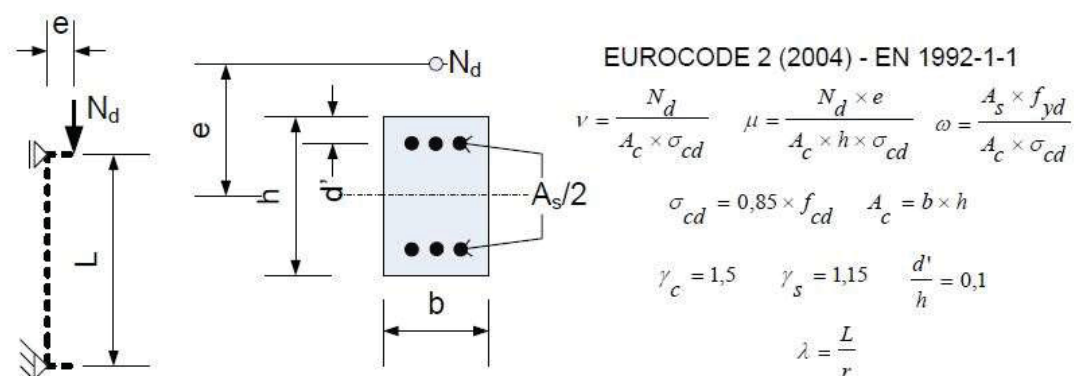


FONTE: O autor (2017).

2.6.2. EXEMPLO 2

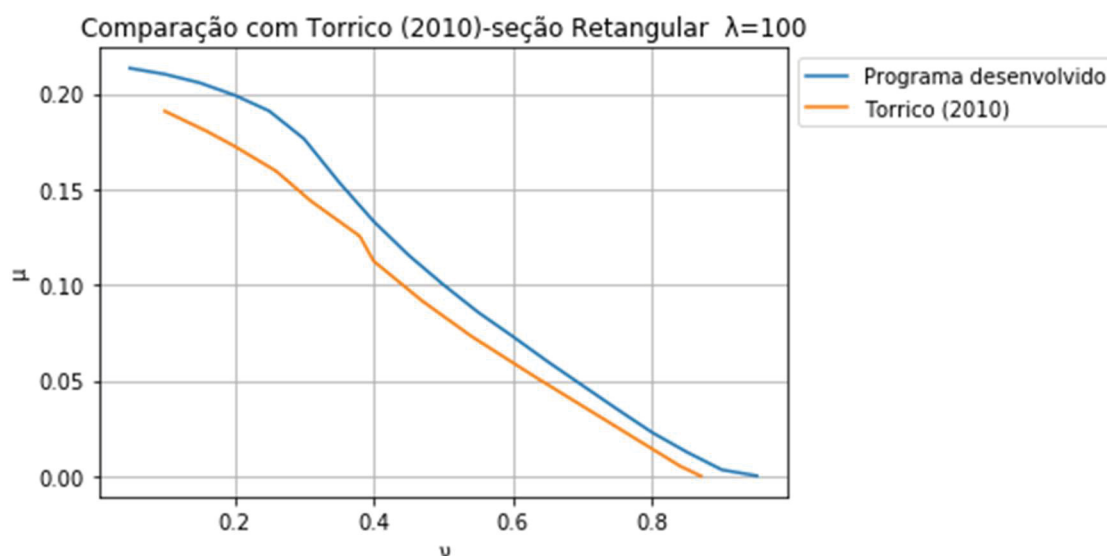
Para validar a rotina de análise de estabilidade, compararam-se os resultados gerados com os apresentados por Torrico (2010) em suas análises teóricas. Os pilares estudados por Torrico (2010) foram submetidos à flexão composta normal e os resultados são dados em forma de diagramas de interação v - μ . Escolheu-se colocar lado a lado os resultados para pilares com f_{ck} igual a 60 MPa e configuração de armadura conforme a FIGURA 46.

FIGURA 46 - CONFIGURAÇÃO DE ARMADURA E FORMULAÇÕES LEVADAS EM CONTA POR TORRICO (2011)



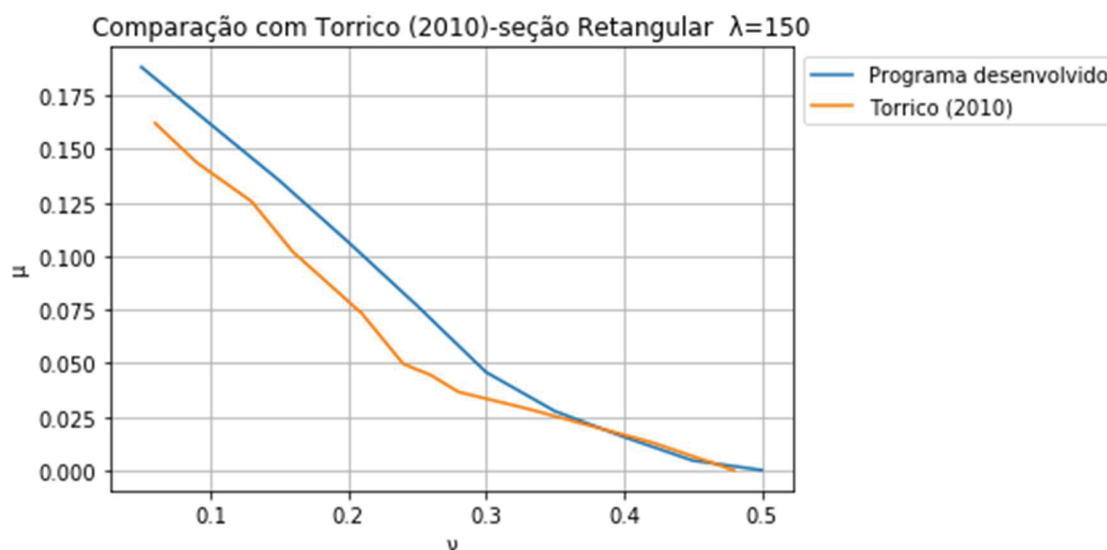
FONTE: TORRICO (2010).

FIGURA 47 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE TORRICO (2010) PARA PILARES COM $\lambda=100$



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 48 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE TORRICO (2010) PARA PILARES COM $\lambda=150$



FONTE: O autor (2017).

Pela FIGURA 47, observa-se que a tendência de comportamento das curvas de interação é bastante parecida para pilares com esbeltez igual a 100. Entretanto, a curva gerada pelo programa deste trabalho mostrou-se um pouco acima do gráfico de Torrico (2010) para todos os valores de esforço normal de compressão. Isso também é visto na FIGURA 48, mas as curvas passam a quase se igualar quando são aplicados valores mais altos de v .

A discordância encontrada pode vir principalmente da rigidez à flexão adotada para os pilares nas análises pelo Método Geral. Torrico (2010) utilizou

o módulo de elasticidade simplificado proposto pelo EUROCODE 2 (2004). Já no código aqui apresentado buscaram-se resultados pontuais de curvatura das seções, de acordo com o diagrama de momentos fletores internos. As simplificações desse tipo tendem a gerar resultados mais conservadores do que aqueles nos quais o grau de simplificação é menor, como visualizado nas duas figuras.

3. RESULTADOS

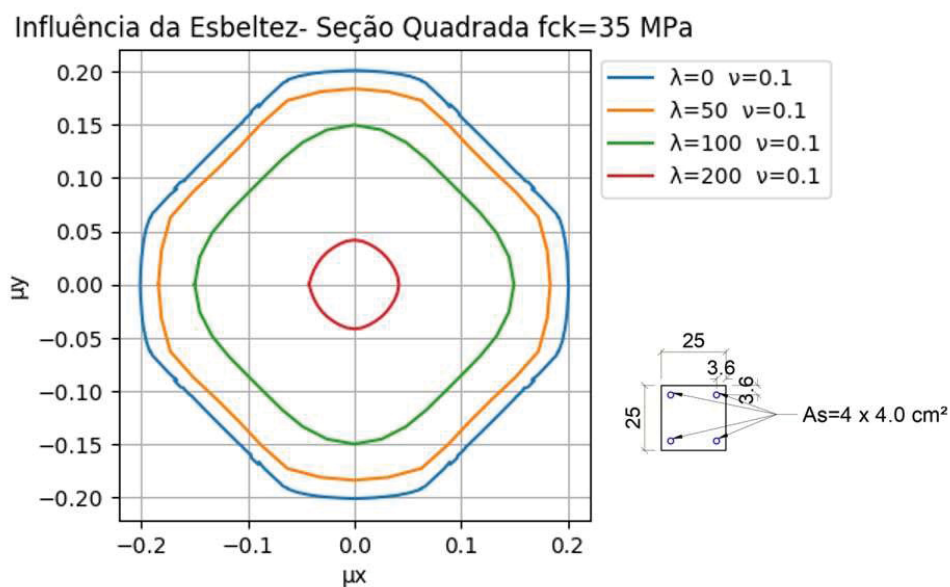
A apresentação dos resultados é dividida em três tópicos principais. Primeiramente, mostra-se a influência da esbelteza dos pilares no dimensionamento à instabilidade. Em seguida, são exibidas figuras que comparam o desempenho de pilares com diferentes valores de f_{ck} . Por último, compara-se a capacidade resistente das diferentes seções transversais processadas, segundo diferentes valores de esbelteza e f_{ck} .

3.1. INFLUÊNCIA DO ÍNDICE DE ESBELTEZ

Tomando-se como base pilares de mesma seção transversal e resistência característica do concreto, busca-se avaliar a influência do aumento do índice de esbelteza das peças em sua capacidade resistente.

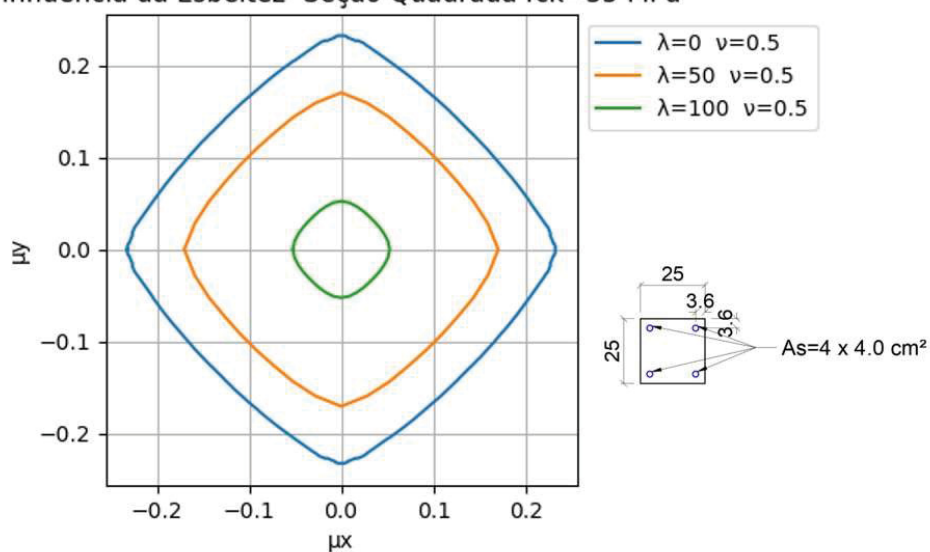
A FIGURA 49, a FIGURA 50 e a FIGURA 51 trazem os diagramas de interação adimensionais para seções quadradas com f_{ck} de 35 MPa para taxas de compressão entre 0,1 e 1,1.

FIGURA 49 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$



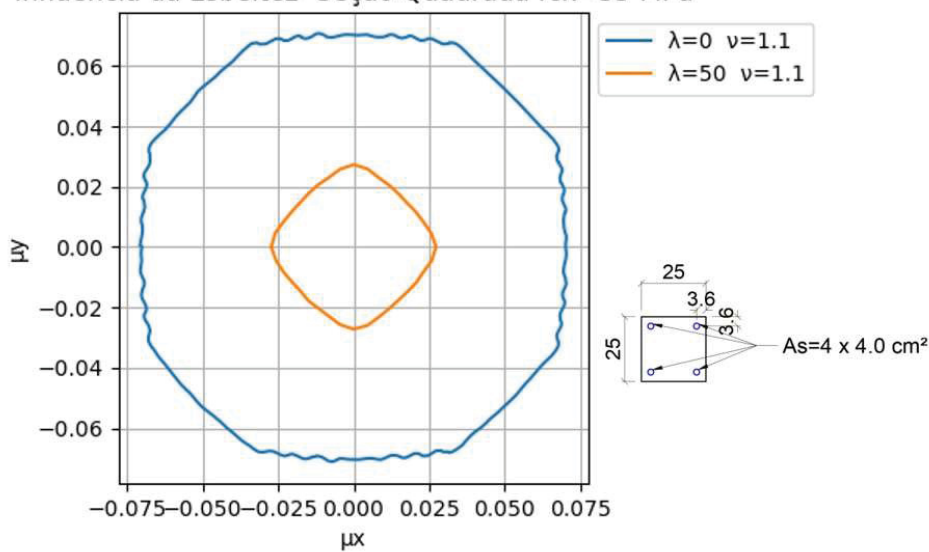
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 50 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,5$
Influência da Esbeltez- Seção Quadrada $f_{ck}=35$ MPa



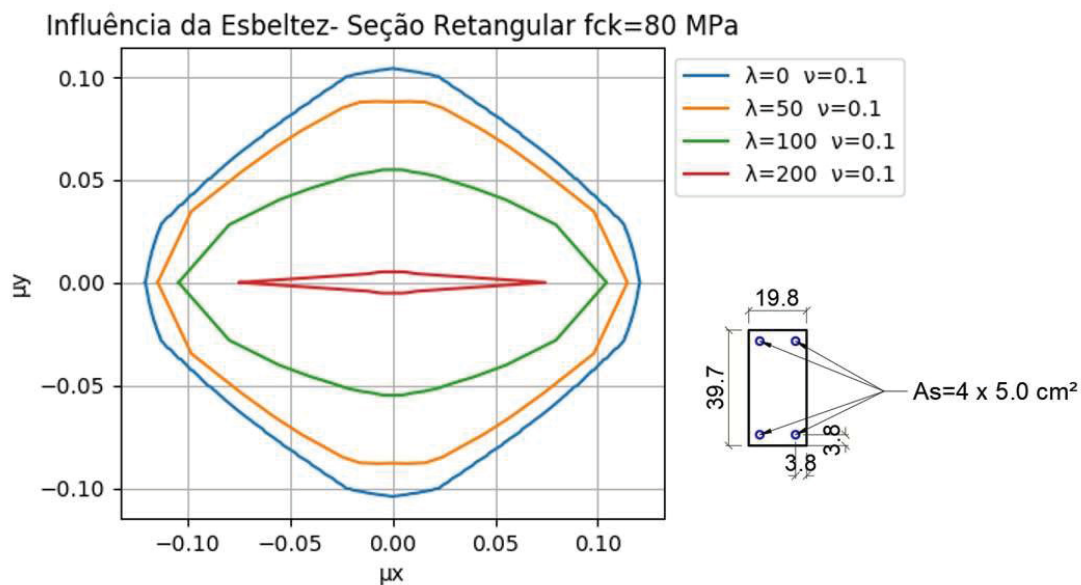
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 51 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=1,1$
Influência da Esbeltez- Seção Quadrada $f_{ck}=35$ MPa

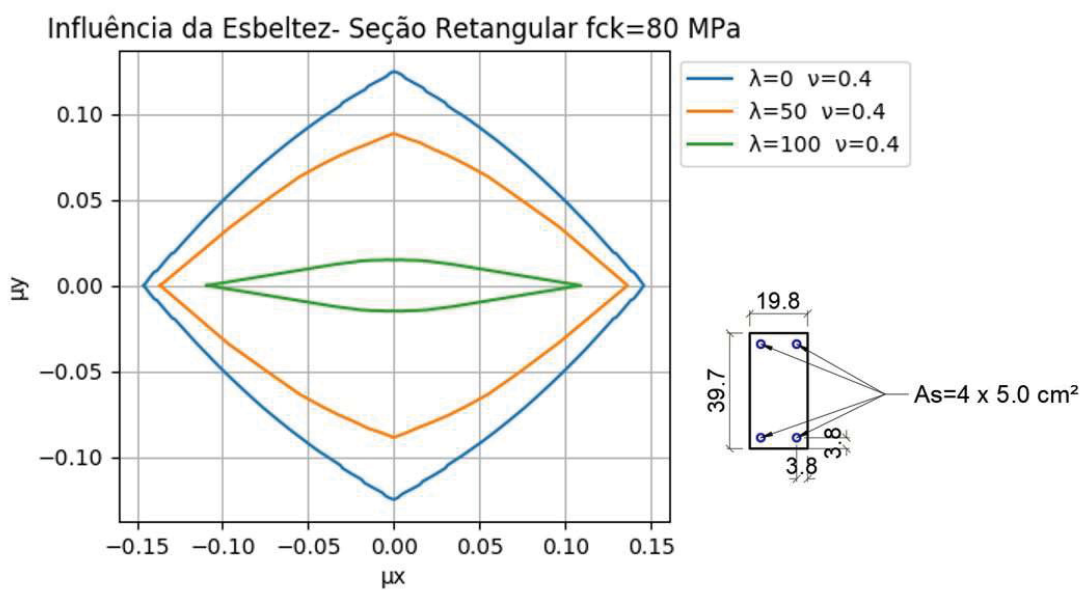


FONTE: O autor (2017).

Outro exemplo que ilustra a influência do aumento do comprimento do pilar está na FIGURA 52, na FIGURA 53 e na FIGURA 54. Estes gráficos são gerados para seções transversais retangulares com f_{ck} de 80 MPa.

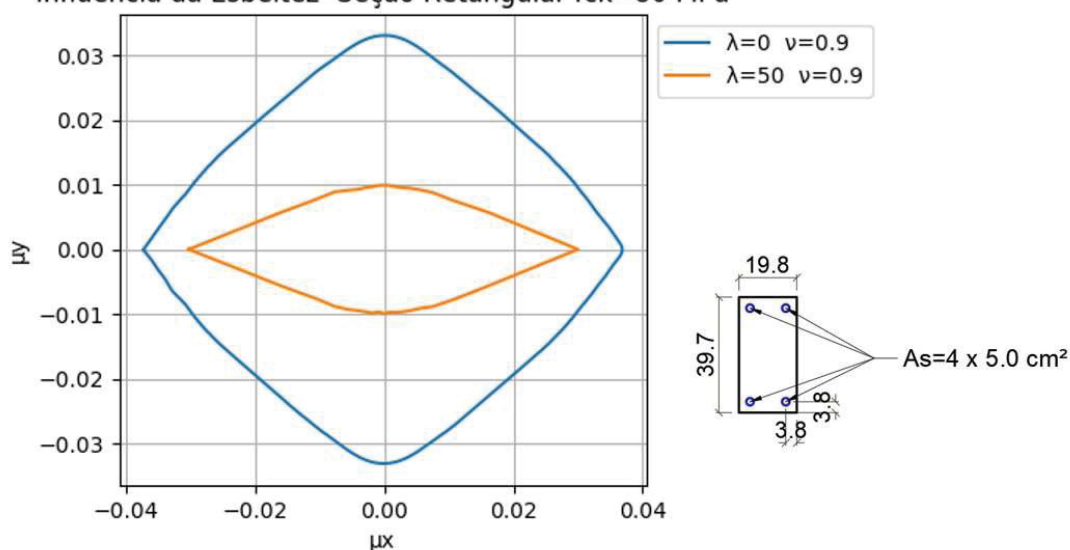
FIGURA 52 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,1$ 

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 53 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,4$ 

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 54 - PILARES DE SEÇÃO RETANGULAR, f_{ck} DE 80 MPa E $\nu=0,9$
Influência da Esbeltez- Seção Retangular $f_{ck}=80$ MPa

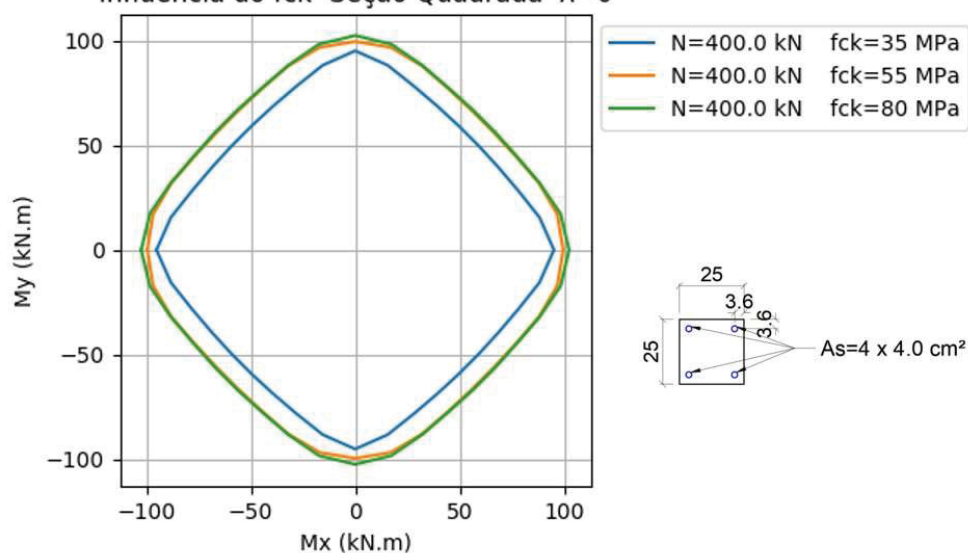


FONTE: O autor (2017).

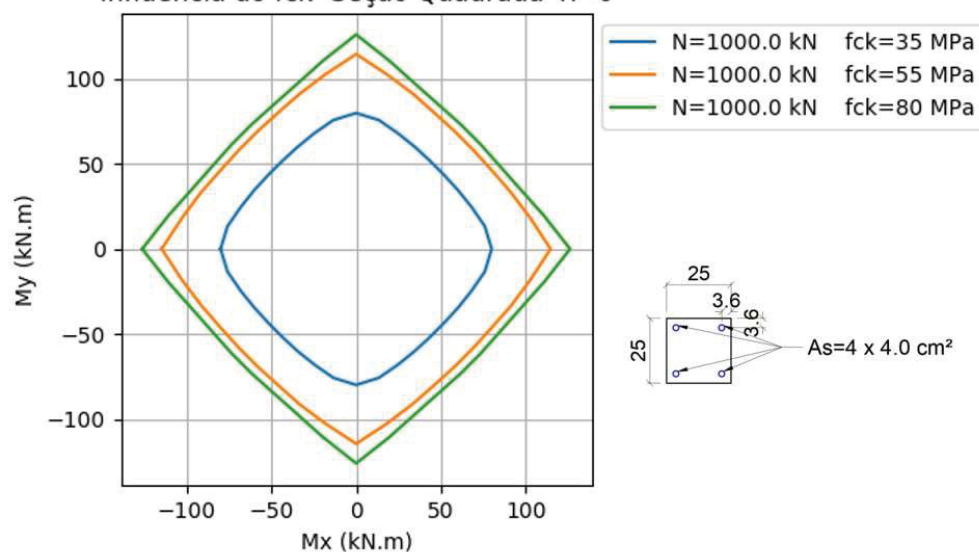
3.2. INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

A análise da interferência do f_{ck} do concreto compara os diagramas de interação de pilares com mesma seção transversal e mesmo índice de esbeltez. Nessa direção, a FIGURA 55, a FIGURA 56 e a FIGURA 57 apresentam os resultados para os pilares de seção quadrada e índice de esbeltez igual a zero.

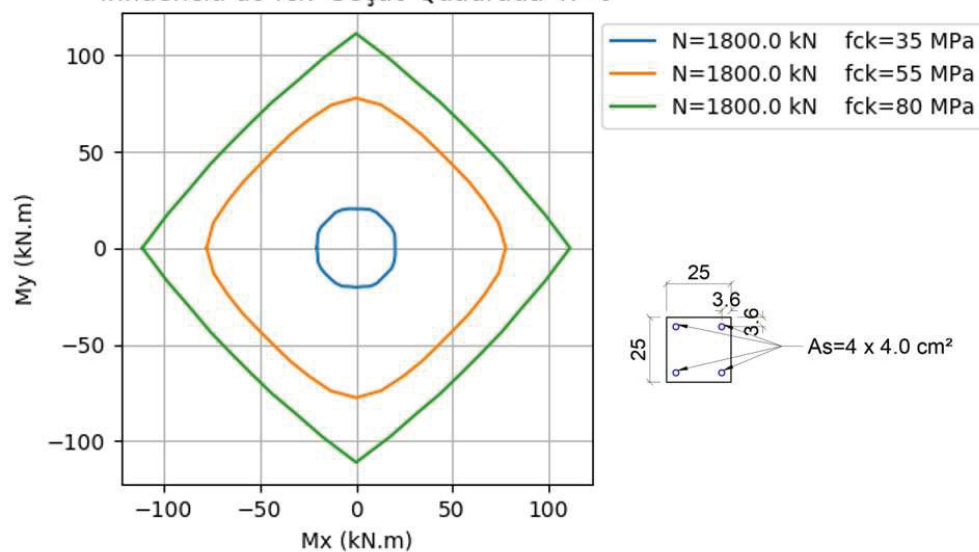
FIGURA 55 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=400 \text{ kN}$
Influência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=0$



FONTE: O autor (2017).

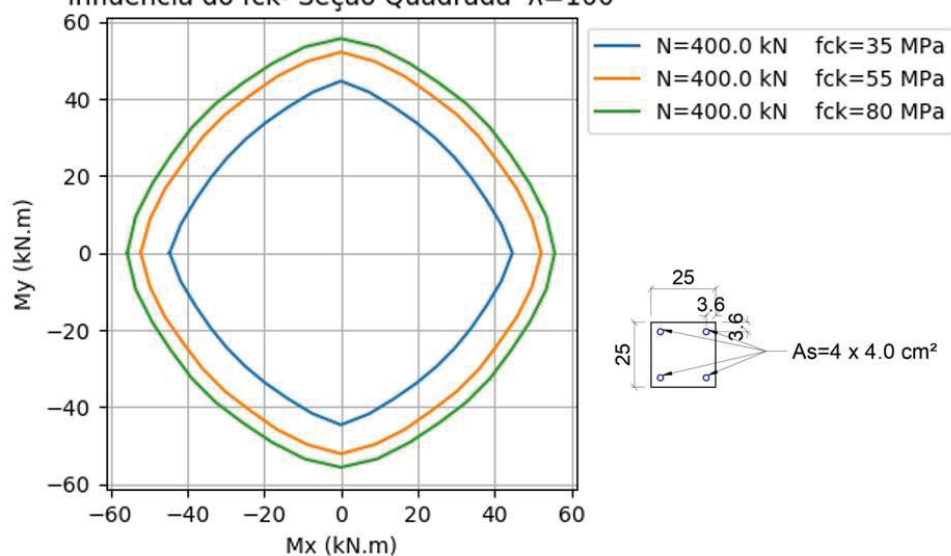
FIGURA 56 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=1000$ kNInfluência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=0$ 

FONTE: O autor (2017).

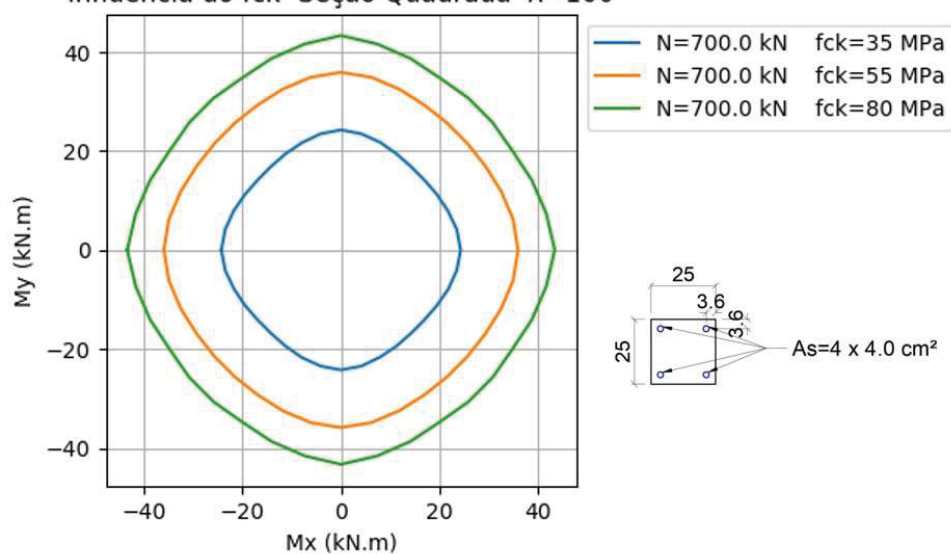
FIGURA 57 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=0$ E $N=1800$ kNInfluência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=0$ 

FONTE: O autor (2017).

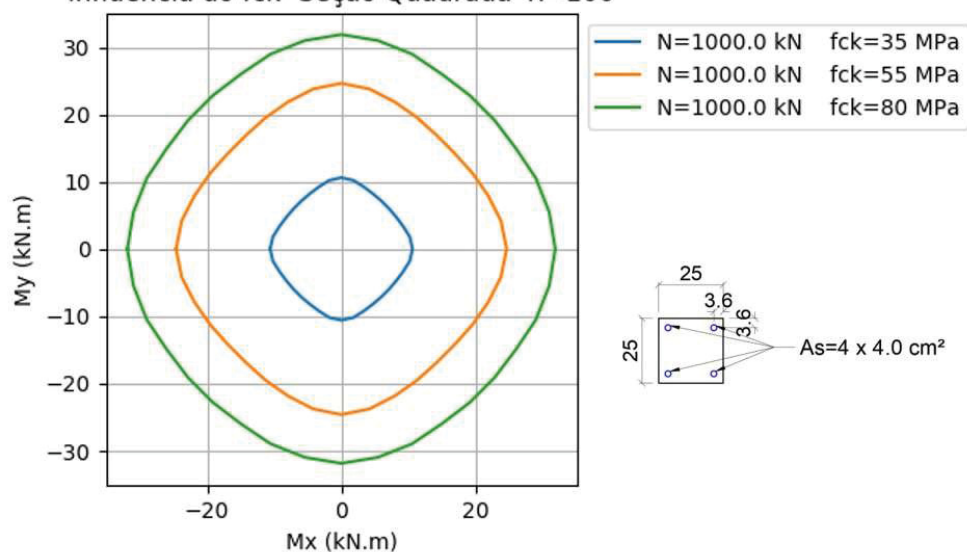
Já a FIGURA 58, a FIGURA 59 e a FIGURA 60 expressam comparativamente as respostas para pilares de seção quadrada quando a instabilidade passa a interferir no problema ($\lambda=100$).

FIGURA 58 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=400$ kNInfluência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=100$ 

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 59 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=700$ kNInfluência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=100$ 

FONTE: O autor (2017).

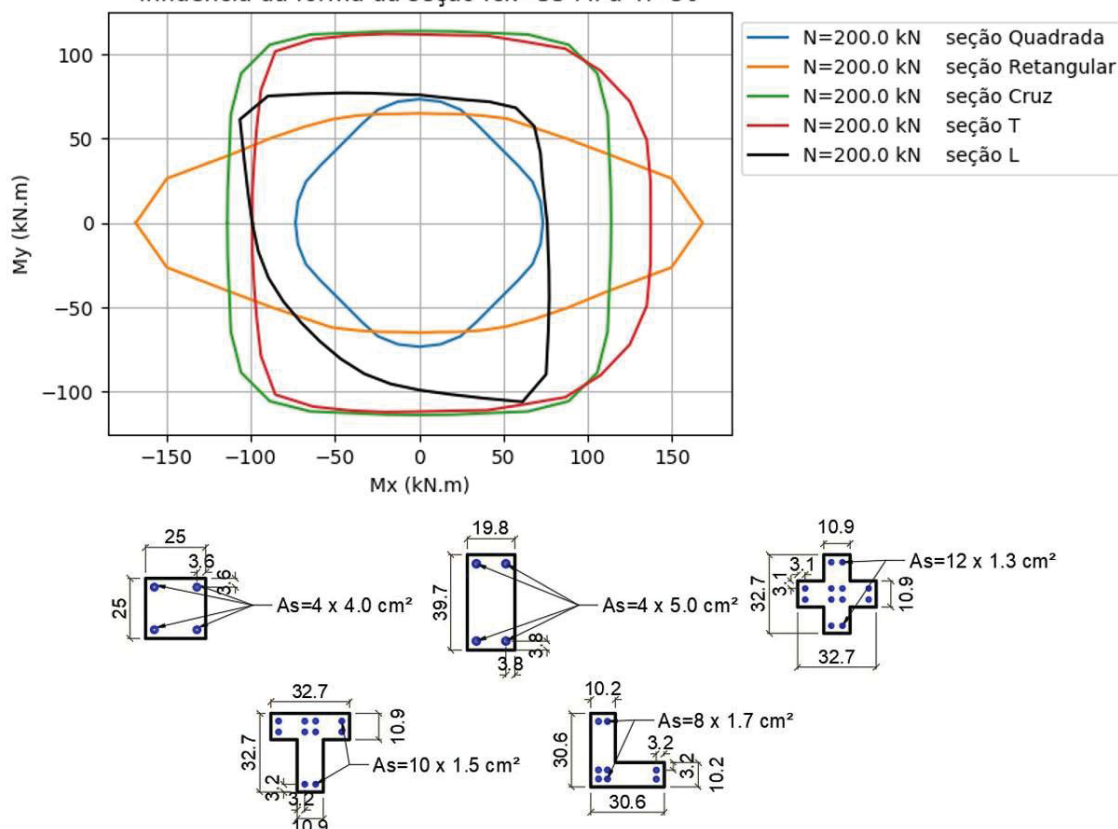
FIGURA 60 - PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, $\lambda=100$ E $N=1000$ kNInfluência do f_{ck} - Seção Quadrada $\lambda=100$ 

FONTE: O autor (2017).

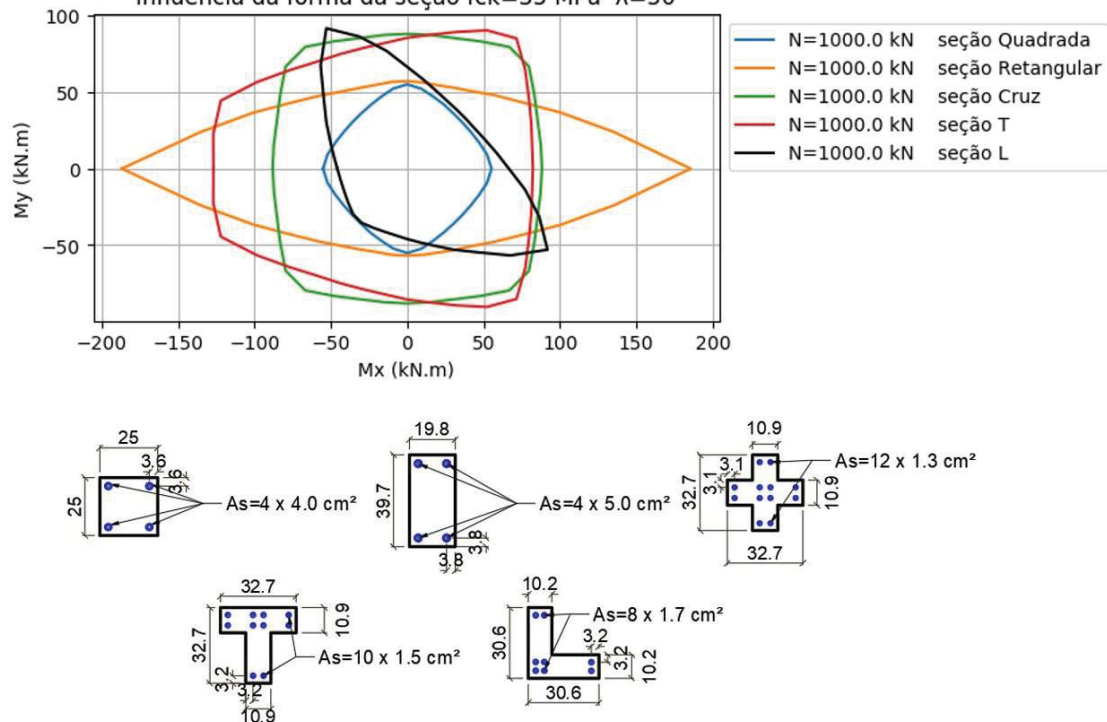
3.3. INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Com o intuito de confrontar o desempenho dos diferentes formatos de seção transversal, inserem-se em um mesmo gráfico as envoltórias de resistência de pilares com mesmos consumos e resistências do concreto e do aço, mesmos valores para a força de compressão e mesmos valores de esbeltez.

Em relação aos pilares compostos de concreto com f_{ck} de 35MPa, a FIGURA 61, a FIGURA 62 e a FIGURA 63 ilustram os resultados obtidos para pilares com $\lambda=50$.

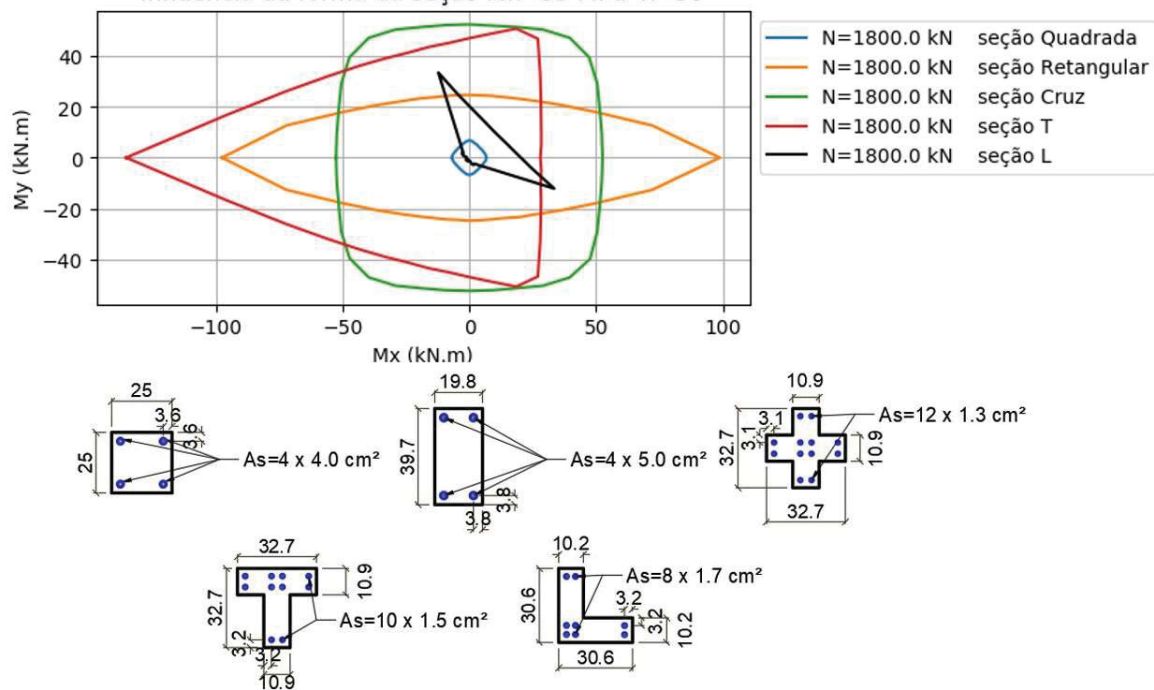
FIGURA 61 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=200$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=35$ MPa $\lambda=50$ 

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 62 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1000$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=35$ MPa $\lambda=50$ 

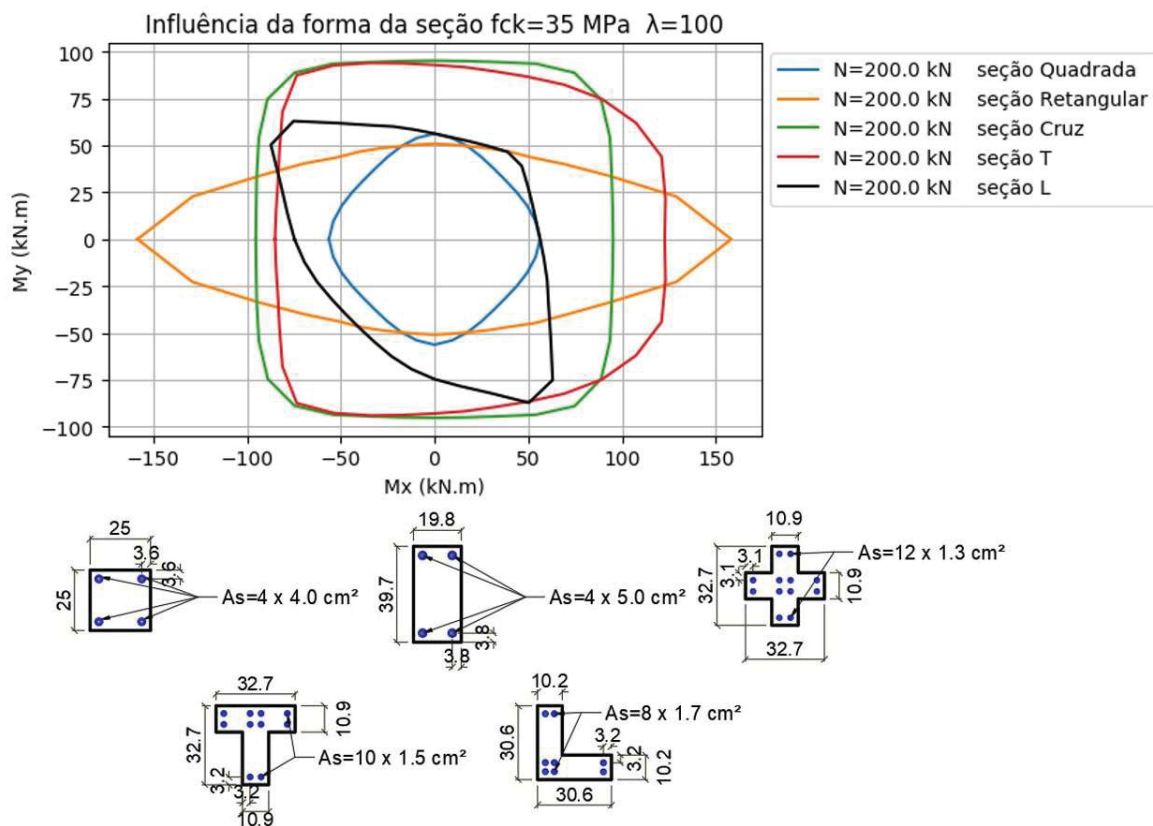
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 63 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1800$ kN
Influência da forma da seção $f_{ck}=35$ MPa $\lambda=50$

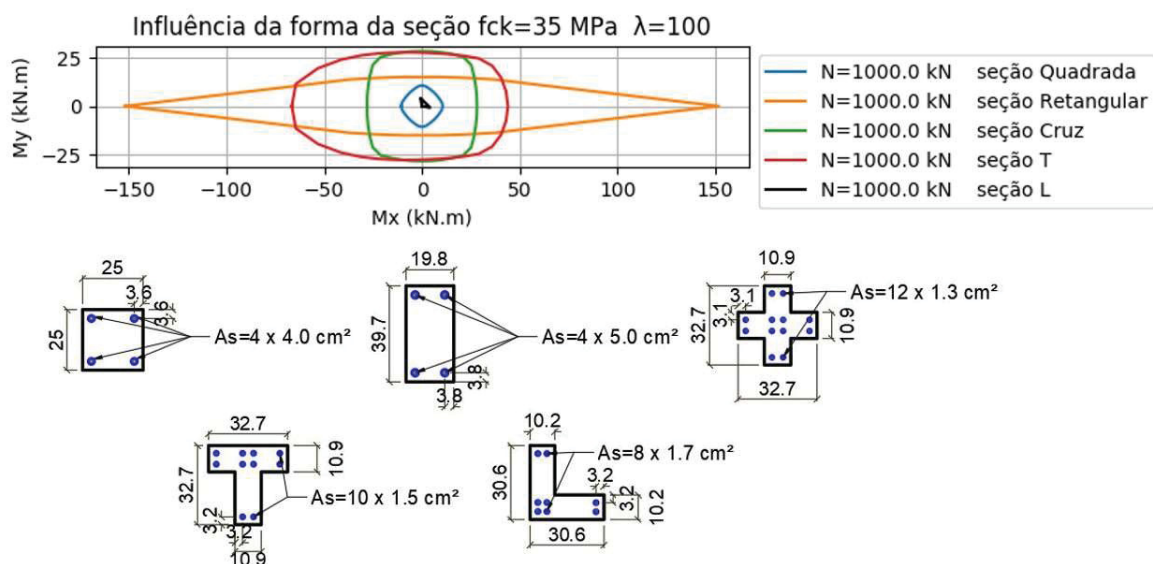


FONTE: O autor (2017).

Quando o índice de esbeltez aumenta, os gráficos das figuras anteriores passam a ter a forma estabelecida pela FIGURA 64 e pela FIGURA 65, que trazem resultados para $\lambda=50$.

FIGURA 64 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=100$ e $N=200$ kN

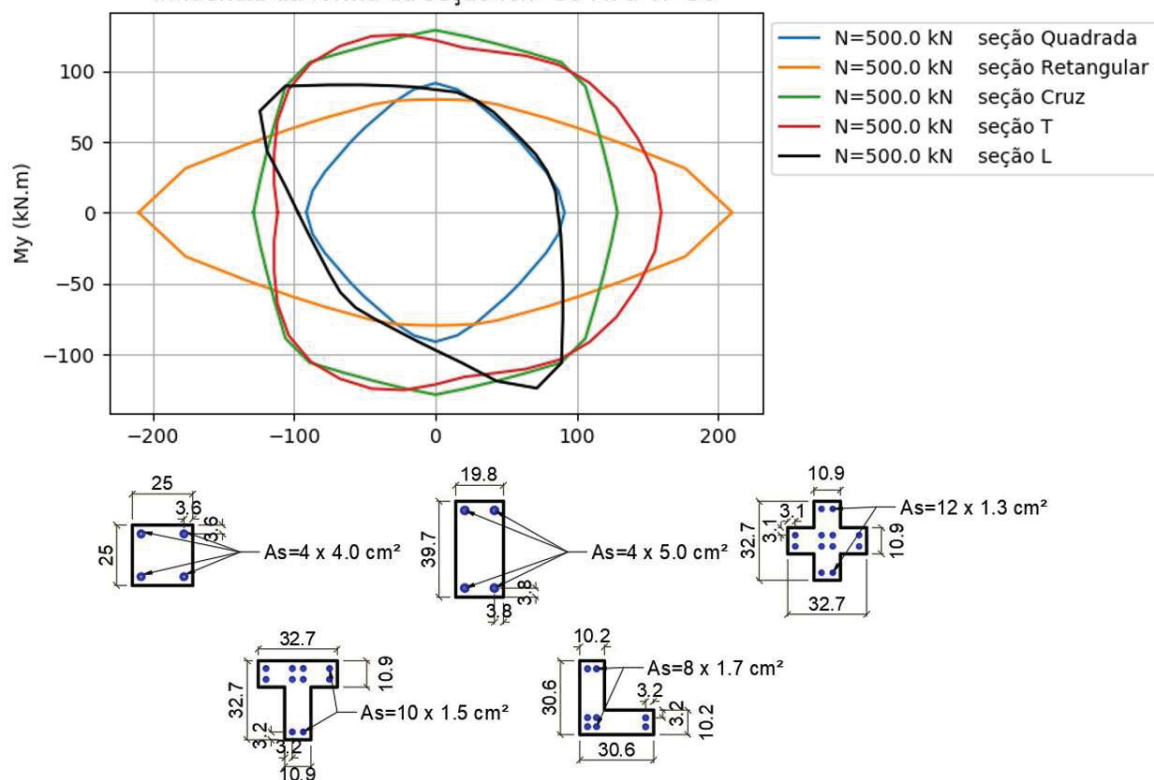
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 65 - PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa, $\lambda=100$ e $N=1000$ Kn

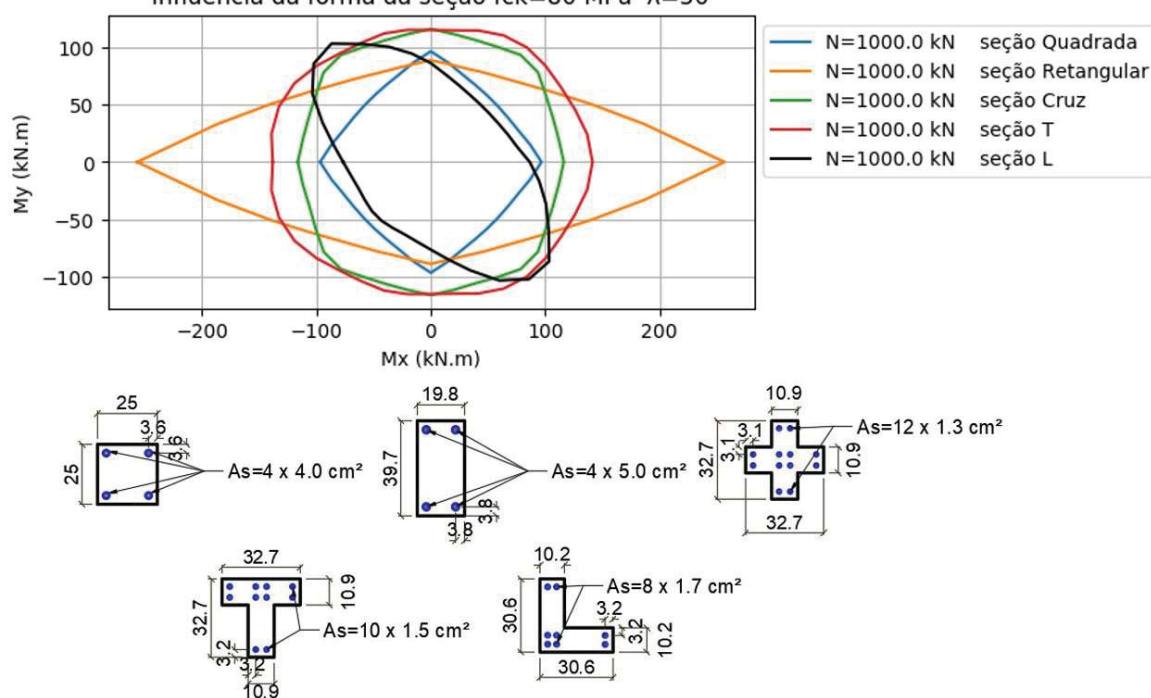
FONTE: O autor (2017).

Também é traçado um comparativo de resistência à flexão das seções transversais com $f_{ck}=80$ MPa, que é feito primeiramente para o índice de esbeltez igual a 50, como mostram a FIGURA 66, a FIGURA 67 e a FIGURA 68.

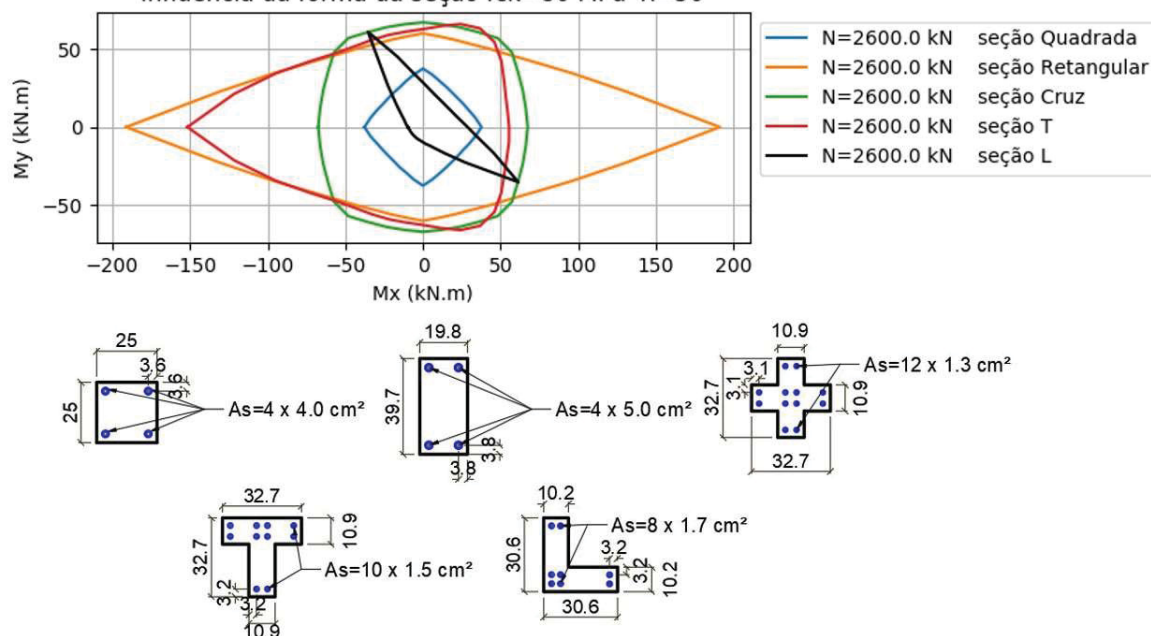
FIGURA 66 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=500$ kN
Influência da forma da seção $f_{ck}=80$ MPa $\lambda=50$



FONTE: O autor (2017).

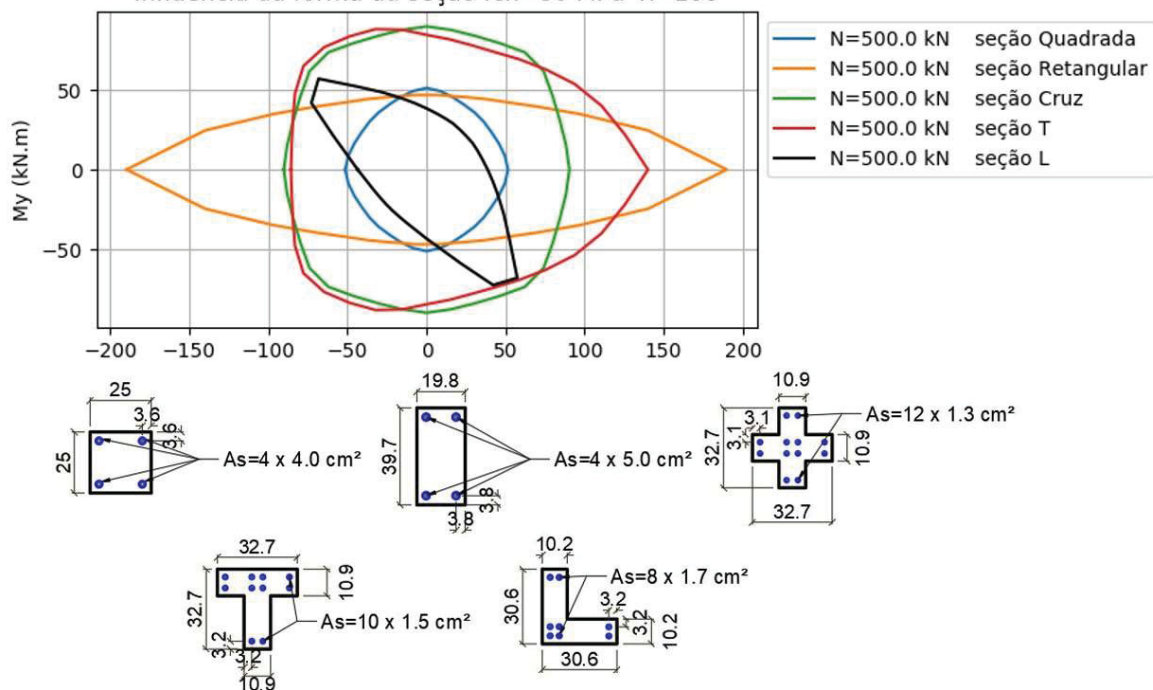
FIGURA 67 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=1000$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=80$ MPa $\lambda=50$ 

FONTE: O autor (2017).

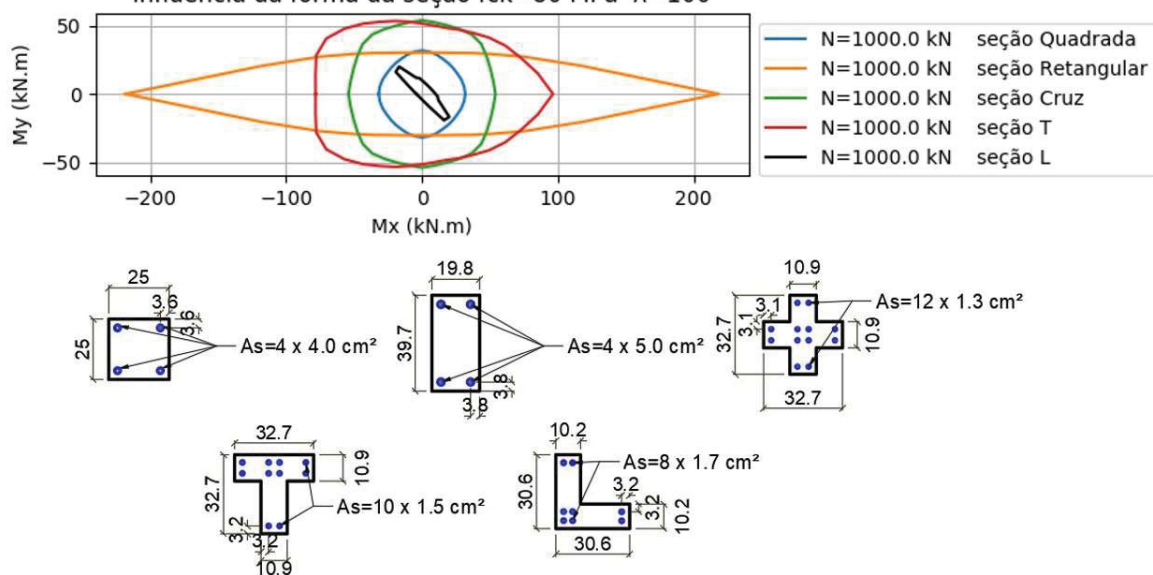
FIGURA 68 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=50$ e $N=2600$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=80$ MPa $\lambda=50$ 

FONTE: O autor (2017).

Além das envoltórias já apresentadas, a FIGURA 69 e a FIGURA 70 trazem a confrontação das resistências máximas dos pilares quando $\lambda=100$.

FIGURA 69 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=100$ e $N=500$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=80$ MPa $\lambda=100$ 

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 70 - PILARES COM $f_{ck}=80$ MPa, $\lambda=100$ e $N=1000$ kNInfluência da forma da seção $f_{ck}=80$ MPa $\lambda=100$ 

FONTE: O autor (2017).

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, procura-se discutir todos os resultados apresentados no capítulo 3, com ênfase nas principais comparações abordadas e nas possíveis origens de cada fenômeno identificado.

4.1. INFLUÊNCIA DO ÍNDICE DE ESBELTEZ

Com base nas figuras apresentadas, percebe-se que o efeito da esbeltez das peças na redução da resistência à flexão é maior ao passo que se aumenta a taxa de compressão adimensional (ν). A evolução deste fenômeno é vista tanto nas seções quadradas quanto nas seções retangulares, cujos diagramas de interação são colocados.

Isso pode ser esclarecido pelo fato de que, durante a aplicação dos carregamentos nos pilares, os deslocamentos transversais em x e y são função do comprimento destravado. Como consequência, os momentos fletores de segunda ordem, que são originários dessas flechas e do carregamento de compressão, aumentam à medida que a peça se torna mais esbelta. Assim, a seção crítica do pilar atinge sua capacidade resistente final com excentricidades de primeira ordem cada vez menores. Mesmo para pilares com $\lambda=50$, submetidos a baixos valores de ν , é clara a interferência do fenômeno de perda de estabilidade.

Outro aspecto a ser destacado nas seções quadradas é a tendência que as envoltórias de momentos têm de sair de um formato aproximado de losango e assumir um formato aproximado de círculo quando há o aumento do nível de compressão. Nesse contexto, pode-se ter uma melhor interpretação do fato quando se atenta para o equilíbrio da seção transversal e para as curvaturas máximas suportadas, em função do ângulo θ formado entre o momento resultante e o eixo x .

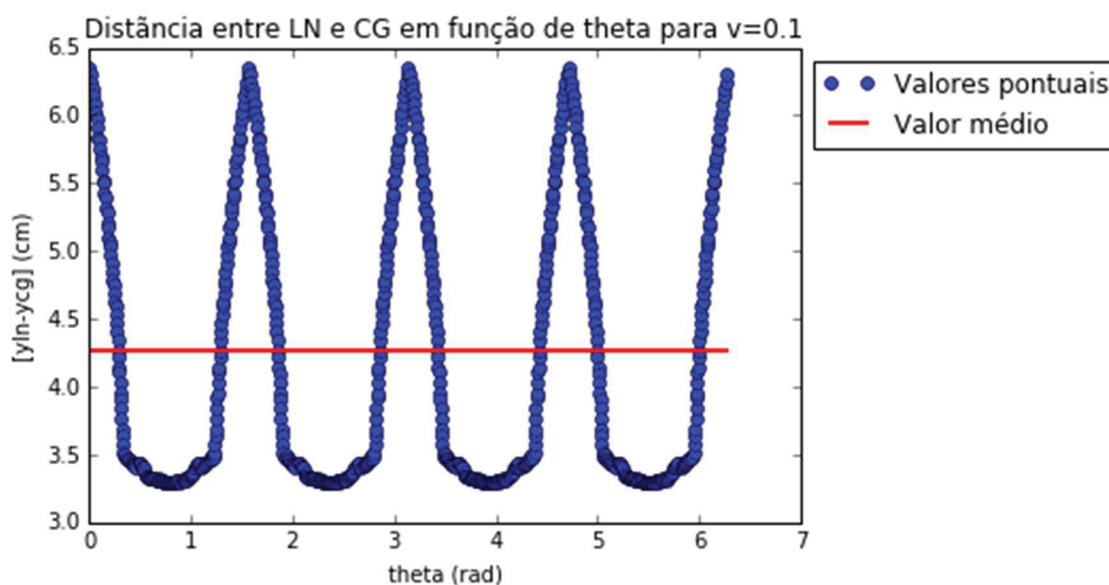
No caso de seções submetidas a taxas de compressão menores, a linha neutra corta a seção e fica acima de seu centroide para todos os valores de θ , como mostra a FIGURA 71. Porém, nesta mesma figura, nota-se que a posição de equilíbrio da linha neutra tende a ficar mais distante do centroide quando a magnitude de θ corresponde a um dos eixos principais de inércia (0° , 90° , 180° e 270°). Isso permite que as poligonais comprimidas tenham áreas menores e

que curvaturas maiores (FIGURA 72) possam ser atingidas pela seção sem que haja ruptura por encurtamento excessivo do concreto.

Consequentemente, os momentos fletores resistentes são significativamente maiores para θ mais próximo dos eixos principais de inércia e menores quando θ está mais distante desses eixos. Com isso, as envoltórias de momentos passam a ter um formato que se aproxima de um losango.

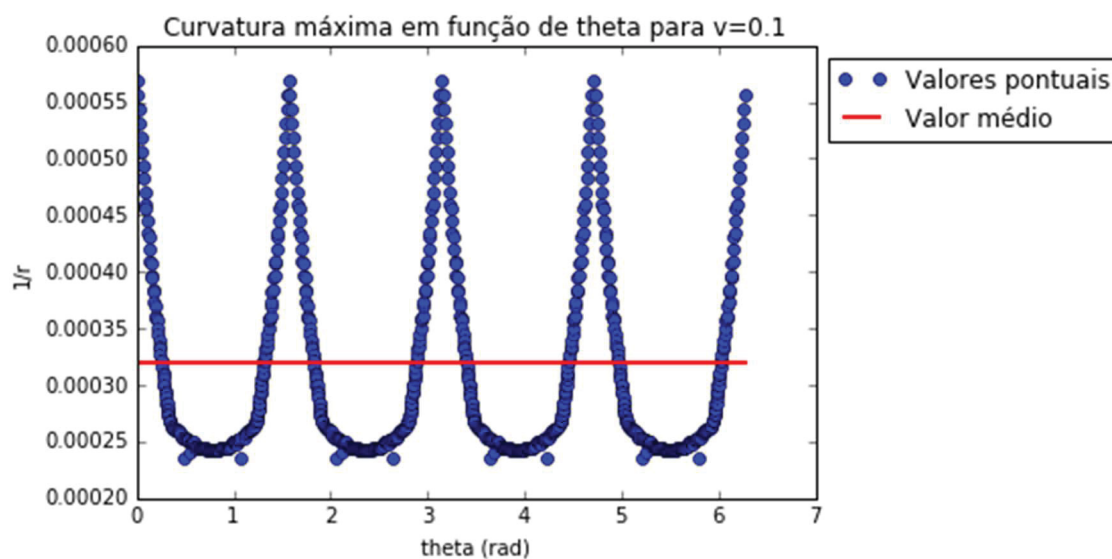
A mesma situação não ocorre para valores maiores de compressão, como indicam a FIGURA 73 e a FIGURA 74, para $\nu=1,1$. Nos referidos gráficos, a variação relativa da posição da linha neutra e da curvatura máxima em torno do valor médio é bem menor, à medida que se varia θ . Isso faz com que os momentos resistentes também variem pouco em torno de um valor médio. Dessa forma, obtém-se diagramas de interação com formato mais próximo de um círculo.

FIGURA 71 - DISTÂNCIA ENTRE POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA LINHA NEUTRA E O CENTRO DE GRAVIDADE DA SEÇÃO TRANSVERSAL EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$



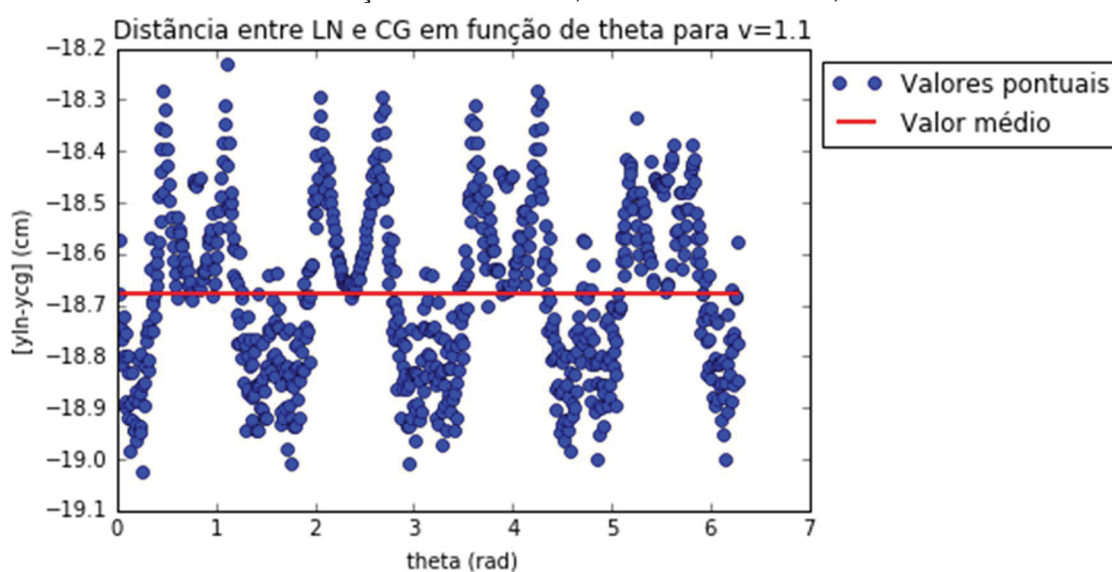
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 72 - CURVATURAS MÁXIMAS EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA E f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$



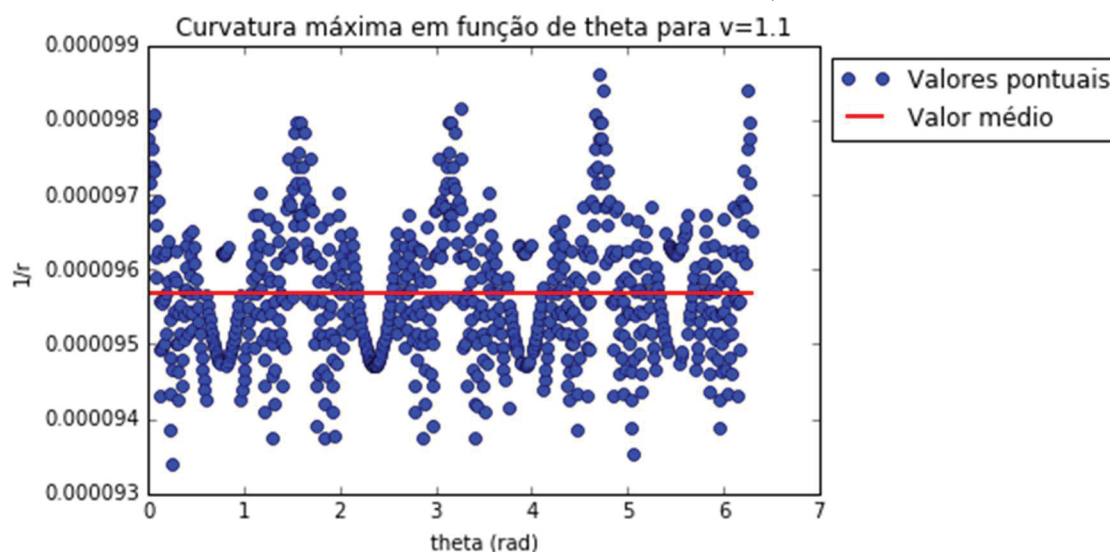
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 73 - DISTÂNCIA ENTRE POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA LINHA NEUTRA E O CENTRO DE GRAVIDADE DA SEÇÃO TRANSVERSAL EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA, f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=1,1$



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 74 - CURVATURAS MÁXIMAS EM FUNÇÃO DE θ , PARA PILARES DE SEÇÃO QUADRADA E f_{ck} DE 35 MPa E $\nu=0,1$



FONTE: O autor (2017).

Analisando com mais especificidade os pilares retangulares da FIGURA 52, da FIGURA 53 e da FIGURA 54, é possível atestar uma maior influência do aumento da esbeltez sobre os valores de momento em torno do eixo y . Tal fato é interpretado como um efeito da diferença de rigidez do pilar nas direções x e y . A esbeltez em torno do eixo y é a esbeltez mais crítica, sendo correspondente a 2 vezes o valor da esbeltez em torno de x , algo que explica a maior sensibilidade para M_y .

4.2. INFLUÊNCIA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

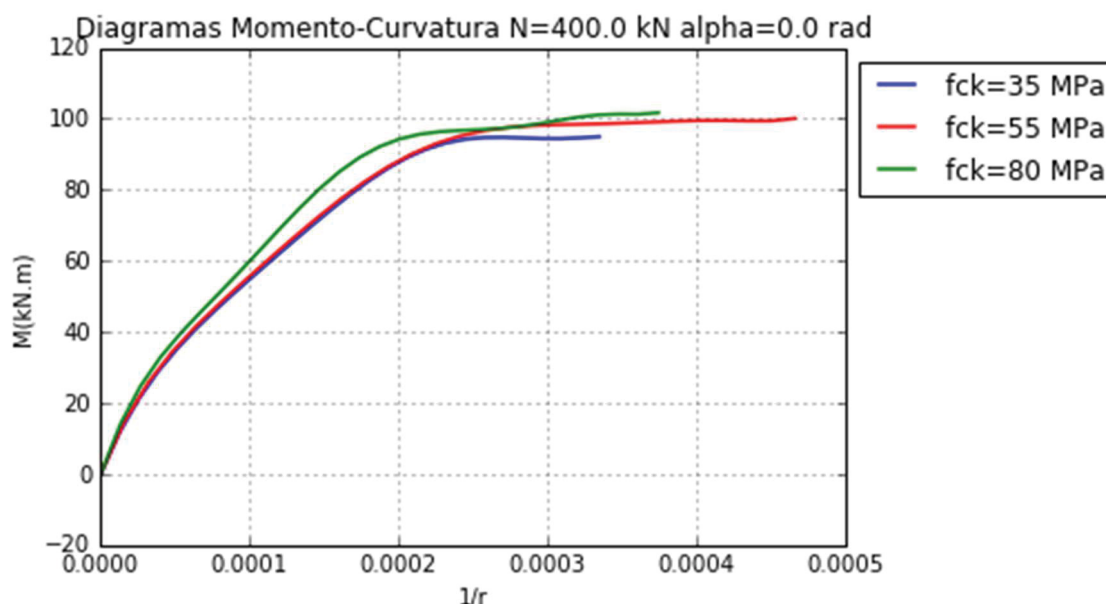
Constata-se, na FIGURA 55, uma grande aproximação entre as envoltórias de resistência à flexão dos pilares com concreto de $f_{ck}=55$ MPa e $f_{ck}=80$ MPa, quando $\lambda=0$ e $N=400$ kN. Nessa situação, até mesmo o pilar com concreto C35 não apresenta uma redução significativa de resistência, se comparado aos que possuem concretos com f_{ck} maior.

Pela FIGURA 75, em que se analisam lado a lado os diagramas momento-curvatura para as mesmas seções e com f_{ck} diferentes, encontra-se a explicação para o fenômeno descrito acima. Embora proporcione uma rigidez maior à seção, o f_{ck} de 80 MPa leva a um momento máximo resistente muito parecido com aquele proporcionado pelo $f_{ck}=35$ MPa. Como a FIGURA 55 compara pilares com índice de esbeltez nulo, o único parâmetro importante vindo do diagrama

momento-curvatura é o momento máximo resistente e, sendo estes valores próximos, levarão a diagramas de interação também estreitamente próximos.

Contudo, quando se aumenta a esbeltez (FIGURA 58), a diferença de momentos máximos resistentes em função do f_{ck} fica mais evidente. Isso ocorre pelo fato de que concretos com maior capacidade de compressão proporcionam também maiores rigidezes nos trechos iniciais dos diagramas momento-curvatura. Consequentemente, tem-se a redução da deslocabilidade dos pilares e dos efeitos de segunda ordem, o que permite excentricidades de primeira ordem maiores.

FIGURA 75 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES QUADRADAS COM $N=400$ kN E INCLINAÇÃO α DA LINHA NEUTRA IGUAL A ZERO



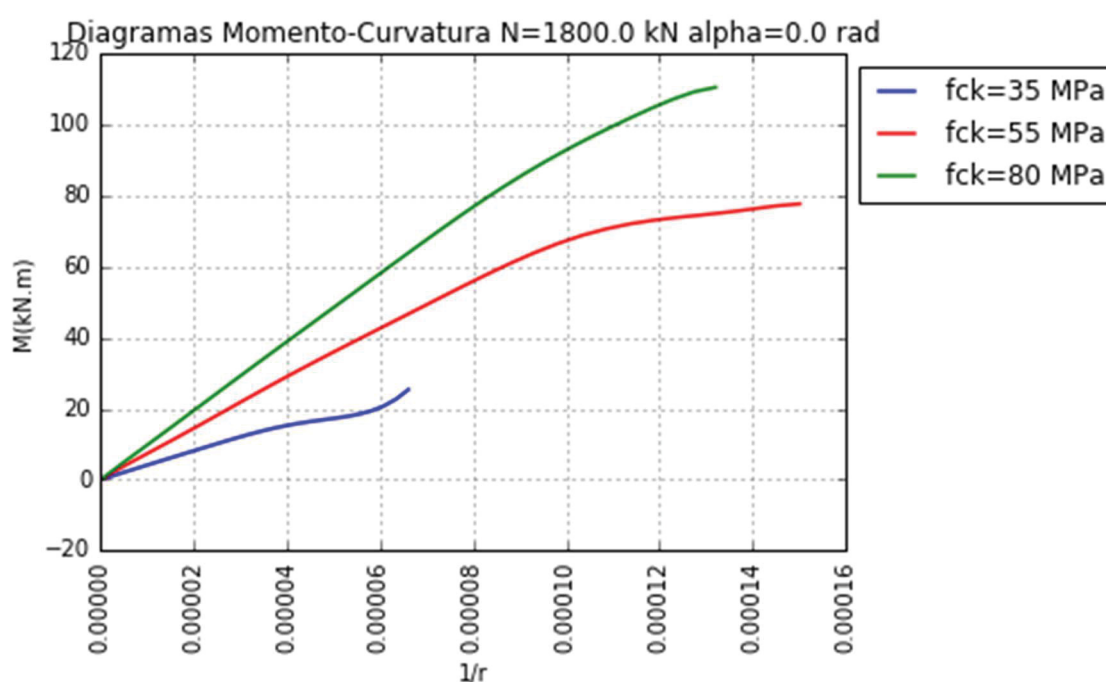
FONTE: O autor (2017).

Em contrapartida, quando a carga de compressão cresce, as diferenças de resistência são maiores, mesmo para pilares com esbeltez igual a zero, como indica a FIGURA 57. Nestes casos, o aumento da resistência do concreto gera seções transversais mais rígidas e com maior capacidade de suporte à flexão, conforme os gráficos da FIGURA 76.

Essa diferença entre os diagramas da FIGURA 75 e da FIGURA 76 é devida à mudança na configuração de equilíbrio das seções transversais quando do aumento do esforço normal. Além disso, as leis constitutivas utilizadas para avaliar o comportamento dos concretos também têm influência.

Quando as seções são sujeitadas a esforços de compressão de baixa magnitude, as deformações predominantes são oriundas da flexão e a linha neutra equilibra-se próxima ao centroide. Com isso, são geradas áreas comprimidas menores e a contribuição do concreto na resistência final também é menor. No momento em que se aumenta a taxa de compressão, o esforço inerente ao concreto também aumenta e a resistência máxima desse material passará a ser importante, aumentando o momento máximo suportado.

FIGURA 76 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES QUADRADAS COM $N=1800$ kN E INCLINAÇÃO α DA LINHA NEUTRA IGUAL A ZERO



FONTE: O autor (2017).

4.3. INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Uma das comparações mais interessantes proporcionadas pelas análises é a percepção de como a forma da seção transversal pode alterar a envoltória de momentos resistentes, com um mesmo consumo de aço e de concreto.

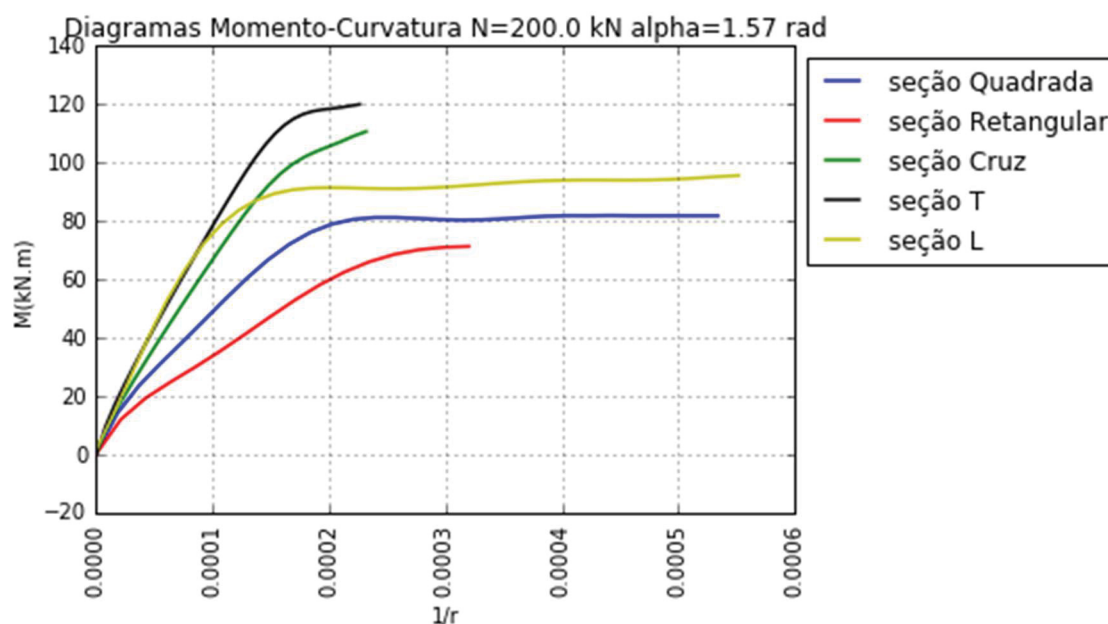
Nesse aspecto, pode-se verificar que a capacidade resistente das seções transversais se altera bastante de acordo com o valor do esforço normal solicitante/resistente e com o ângulo θ formado entre a resultante do momento solicitante/resistente e o eixo x .

Cabe ressaltar que, embora se tenha definido a geometria dos pilares buscando uma comparação equânime, algumas características importantes

acabaram divergindo. Os pilares de seção retangular e T, por exemplo, possuem índices de esbeltez diferentes em x e y. Especificamente para a seção retangular, a esbeltez em torno de x é igual à metade da esbeltez em y. No caso da seção T, a esbeltez em torno de x corresponde à cerca de 82% de λ_y . Portanto, o valor de λ mostrado nos gráficos sempre diz respeito ao valor da máxima esbeltez entre λ_x e λ_y . Essa constatação é importante para o entendimento das disparidades mostradas nas figuras para os momentos fletores em torno do eixo x.

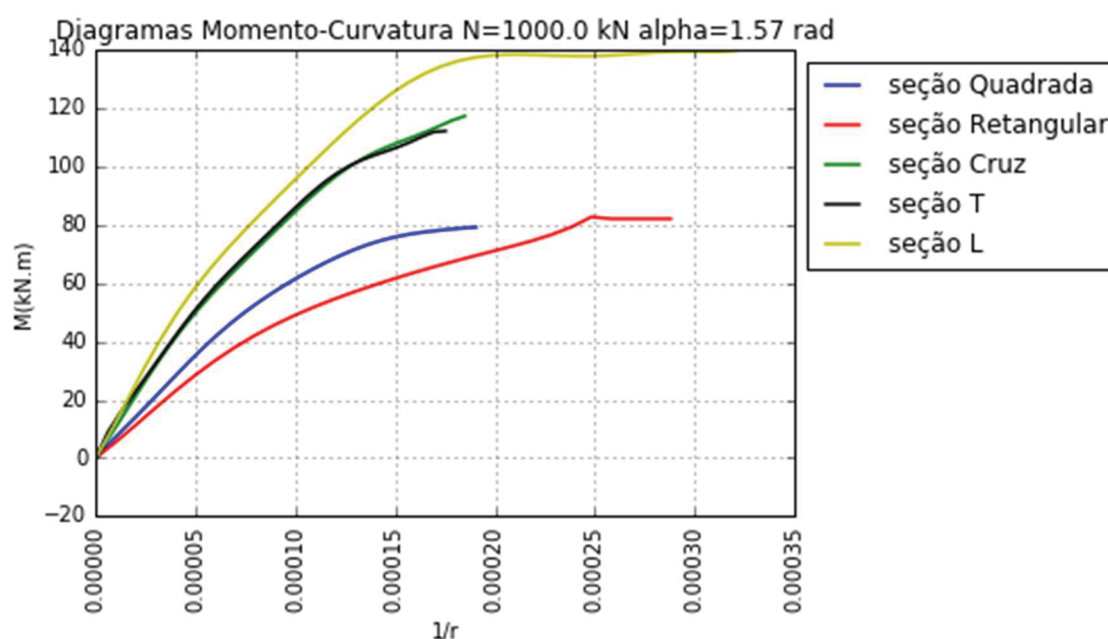
Sendo assim, uma comparação mais justa pode ser feita olhando para os valores de M_y quando $M_x=0$. Sob tal ponto de vista, percebe-se que, independentemente do índice de esbeltez e do valor do esforço normal, os pilares de seção T e cruz são os que apresentam maior capacidade resistente. Isso se confirma ao olharmos para os diagramas momento-curvatura da FIGURA 77, em que os pilares em T e em Cruz são os mais resistentes e dois dos mais rígidos à flexão.

FIGURA 77 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa SUBMETIDOS A $N=200$ kN e $\alpha=90^\circ$



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 78 - DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA PILARES COM $f_{ck}=35$ MPa
SUBMETIDOS A $N=1000$ kN e $\alpha=90^\circ$

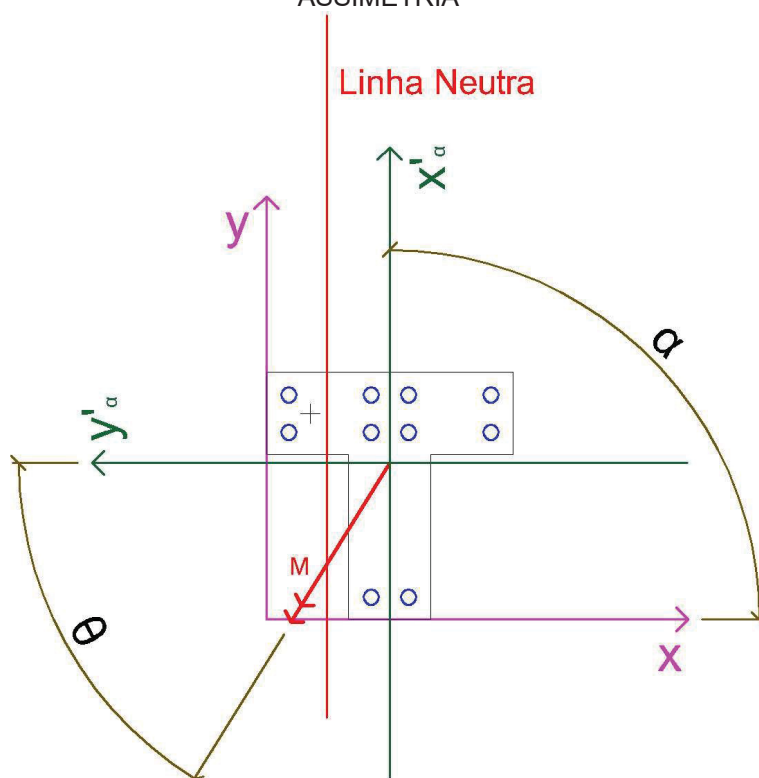


FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 78, porém, constata-se que a seção L é mais rígida e mais resistente que as seções Cruz e T, algo que diverge do que é visto nas envoltórias de momentos da FIGURA 62, da FIGURA 65, da FIGURA 67 e da FIGURA 70, nas quais as seções Cruz e T são bem mais resistentes do que a seção L.

Assim, vê-se que a comparação dos diagramas momento-curvatura não condiz com o comportamento desses pilares após as análises de estabilidade pelo Método Geral. Isso acontece porque, nos diagramas de interação M_x-M_y , o ângulo de solicitação θ avaliado corresponde à direção efetiva da solicitação. O mesmo não ocorre para o ângulo α da FIGURA 77 e da FIGURA 78, que é igual à direção da linha neutra. Em seções que apresentam simetria em relação ao eixo perpendicular à linha neutra, o ângulo θ será igual ao ângulo α , mas o fato não ocorre para as seções T e L, que são assimétricas quando $\theta=90^\circ$. Um exemplo ilustrativo desse evento é mostrado na FIGURA 79.

FIGURA 79 - DIFERENÇA ENTRE ÂNGULOS θ E α PARA SEÇÕES QUE APRESENTAM ASSIMETRIA



FONTE: O autor (2017).

A defasagem entre α e θ também influencia os resultados das envoltórias da FIGURA 65 e da FIGURA 70, nos quais a seção L apresenta a menor resistência entre todas as seções transversais. Ao associar uma seção transversal bastante assimétrica (L) com um índice de esbeltez elevado ($\lambda=100$) e uma carga de compressão mais alta ($N=1000$ kN), a variação de deslocamentos nas análises de segunda ordem não estabilizou, levando o pilar à ruptura com baixas excentricidades. Isso ocorreu porque o processo de convergência foi limitado a um número máximo de iterações. Talvez uma análise adaptativa mais detalhada fosse necessária para indicar a ruptura em casos como esse.

Para os pilares com seção T, no entanto, essa assimetria não foi predominante, o que manteve uma boa resistência à flexão. Uma possível explicação seria o fato da seção possuir uma inércia maior em outra direção (I_x).

Também merece destaque a tendência dos pilares de seção L de apresentar envoltórias com formato mais lamelar ao passo que se aumenta o esforço de compressão. Esse comportamento faz com que os momentos

resistentes para ângulos θ próximos aos eixos de máxima inércia fiquem cada vez mais destacados em relação à ângulos mais afastados de tais eixos.

Ainda é pertinente verificar que o aumento da força de compressão tende a fazer com que a seção retangular fique mais resistente que a seção quadrada quando $M_x=0$. Para esforços de compressão menores (200 kN), isso não ocorre. Justifica-se esse comportamento analisando as inércias I_y e as áreas de concreto das 2 seções. Enquanto a seção quadrada possui momento de inércia $I_y=32552 \text{ cm}^4$ e área $A=625 \text{ cm}^2$, a seção retangular tem $I_y=25837 \text{ cm}^4$ e $A=787 \text{ cm}^2$. Então, quando o esforço normal é baixo, a flexão predomina e a propriedade mais importante é a inércia da seção. No entanto, quando o esforço N cresce, o comportamento axial passa a ser preponderante e a área bruta da seção influencia de maneira mais efetiva na resistência.

Outra constatação é a alteração de forma das envoltórias de resistência dos pilares de seção T com concreto de $f_{ck}=80 \text{ MPa}$ quando o esforço de compressão varia. As envoltórias tendem a afunilar em torno do eixo x para valores de N maiores. É provável que a origem de tal episódio esteja na variação abrupta da área comprimida quando a posição de equilíbrio da linha neutra sai da mesa e muda para a alma da seção.

As seções em formato de cruz apresentaram bom comportamento nas análises, associando resistências relativamente altas e estabilidade quanto às formas das envoltórias, mesmo com a variação do esforço normal de compressão e do índice de esbeltez dos pilares.

5. CONCLUSÕES

Com base nos conceitos abordados pela literatura, desenvolveu-se neste trabalho um algoritmo computacional capaz de calcular as envoltórias de resistência de pilares esbeltos de concreto armado biapoiados, de seção poligonal qualquer e submetidos à flexão composta oblíqua. Este algoritmo foi subdividido em dois outros algoritmos. O primeiro deles é responsável por calcular a relação entre esforço normal, momento fletor e curvatura de uma seção transversal. Já o segundo utiliza os resultados do primeiro como dado de entrada e calcula as máximas excentricidades de primeira ordem para que o pilar resista sem romper em uma análise de segunda ordem.

A integração das tensões nas áreas de concreto comprimido é feita de forma numérica, subdividindo a área da poligonal com uma malha triangular e integrando as funções sobre os triângulos com o uso da quadratura de Gauss-Legendre.

O cálculo dos esforços de segunda ordem é realizado pelo Método Geral acoplado à Analogia de Mohr, baseado na análise da peça por meio do comportamento de seções transversais ao longo de seu comprimento.

Uma das principais constatações durante a implementação do código foi a alta sensibilidade das análises de 2ª ordem à relação entre a inclinação da linha neutra e a direção do momento fletor resistente, principalmente no caso de seções transversais assimétricas. Sendo assim, o algoritmo de avaliação de estabilidade exigiu que os diagramas momento-curvatura fossem gerados para um grande número de valores de inclinação de linha neutra, a cada 0,5° (graus).

Antes do processamento dos modelos do trabalho, a validação do código foi feita a partir de testes com exemplos presentes na literatura. Apesar de pequenas diferenças nas respostas em função das divergências entre as formulações, houve uma boa aproximação.

Com relação aos modelos de pilares processados, buscou-se comparar os desempenhos mecânicos de pilares com resistência do concreto e formatos de seção transversal variados, mas que apresentassem os mesmos consumos de aço e concreto.

Em uma primeira análise, houve a confirmação da grande influência do índice de esbeltez na capacidade resistente dos pilares. Além disso, essa

influência foi maior quando os pilares foram sujeitos a cargas axiais mais altas. Também foi constatada a predisposição de mudança de formato dos diagramas de interação dos pilares quadrados quando do aumento no nível de compressão, o que é explicado pela alteração da posição de equilíbrio da linha neutra.

No que se refere ao grau de interferência do f_{ck} do concreto, percebeu-se que existiram poucas alterações de resistência em pilares com baixo índice de esbeltez e baixa carga de compressão. Entretanto, em pilares mais esbeltos e/ou com esforço normal elevado percebe-se que concretos mais resistentes melhoram significativamente a capacidade das peças de resistir à flexão. Assim, em uma simulação prática de aplicação, pode-se afirmar que valores de f_{ck} menores seriam mais indicados para pilares curtos com esforço predominante de flexão. Por outro lado, concretos com altas resistências seriam preferencialmente indicados para pilares esbeltos e/ou com predominância de esforço normal de compressão.

Já a apuração do impacto da mudança do formato da seção indicou que o comportamento dos pilares depende muito do valor do esforço normal e da direção das solicitações de momento fletor. De maneira geral, as seções em T e em cruz alcançaram melhores resultados em relação às demais, resistindo melhor ao aumento da esbeltez e da taxa de compressão.

Nesse aspecto, os pilares de seção L tiveram bons resultados em condições de λ e N mais baixos, porém apresentaram redução impactante da envoltória resistente quando foram colocados valores maiores desses parâmetros como dados de entrada. Nas seções T com f_{ck} de 80 MPa, o incremento do valor de N propiciou uma mudança de formato das envoltórias em virtude da mudança da posição de equilíbrio da linha neutra.

6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros têm-se:

- a) consideração dos efeitos de torção da peça nos modelos, a avaliação de como os esforços de cisalhamento interferem no dimensionamento dos pilares;
- b) incorporação da resistência à tração do concreto nas análises de segunda ordem;
- c) desenvolvimento de equações que considerem a rigidez do pilar sem a necessidade de interpolação dos diagramas momento-normal-curvatura;
- d) desenvolvimento de modelos que permitam a avaliação da instabilidade local de regiões específicas de elementos como pilares-parede.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto- Procedimento**, ABNT NBR 6118/2014, Rio de Janeiro.

BAZANT, Z. P.; FELLOW; ASCE; XIANG, Y. Inelastic Buckling of Concrete Column in Braced Frame. **Journal of Structural Engineering**, v.113, p. 634-642, 1997.

BONET, J. L.; BARROS, M. H. F. M.; ROMERO, M; L. Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. **Computers and Structures**, v.84, p. 2184-2196, 2006.

BORGES, A. C. L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados à flexo-compressão oblíqua**. Dissertação de Mestrado- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 110 p., São Carlos, 1999.

CADAMURO JÚNIOR, I. W. **Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado com seção qualquer solicitados por flexão composta oblíqua**. Dissertação de Mestrado- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 207 p., São Carlos, 1997.

CECCON, J. L. **Análise dos efeitos de segunda ordem em pilares solicitados a flexão oblíqua composta**. Tese de Doutorado - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 308 p., São Paulo, 2008.

CEN. **Design of Concrete Structures- Part 1-1- General Rules and rules of buildings**, Eurocode 2, Bruxelas, Bélgica, 2004.

DALL'ASTA, A.; DEZI, L. Design of RC Sections with Generic Shape under Biaxial Bending. **Journal of Structural Engineering**, v.118, p. 1138-1143, 1992.

DENG, S. **Quadrature Formulas in Two Dimensions**. Lecture 15- Finite Element Method Classes, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina, 19 p., Charlotte, 2010.

FRANÇA, R. L. S. **Contribuição ao estudo de efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado**. Tese de Doutorado- Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 228 p., São Paulo, 1991.

FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto. Solicitações Normais**. Rio de Janeiro- Guanabara Dois, 1981.

GILLIAM, T. E.; YAMAMOTO, Y.; POSTON, R. W.; BREEN, J. E. **Verification of analysis programs for solid and hollow concrete bridge piers**. Research Report- Center of Transportation Research, University of Texas, 187 p., Austin, 1983.

GILLIES, S. **SHAPELY**, versão 1.6.4.post1, 2017. Disponível em < <https://github.com/Toblerity/Shapely>>. Acesso em 14 jun.2017

GUTIERREZ, J. A. R.; OCHOA, J. D. A. M-P- Φ Diagrams for reinforced, partially, and fully prestressed concrete sections under biaxial bending and axial load. **Journal of Structural Engineering**, v.127, p. 763-773, 2001.

JONES, R. M. **Buckling of bars, plates, and shells**. Blacksburg, Virginia, EUA- Bull Ridge, 2006.

KIMURA, A. E. **Cálculo de Pilares de Concreto Armado- Introdução, Visão Geral e Exemplos**. Apostila de Curso, ABECE, 240 p., São Paulo, 2016.

KLÖCKNER, A. **MESHPY**, versão 2016.1.2, 2016. Disponível em < <https://pypi.python.org/pypi/MeshPy>>. Acesso em 03 ago.2017

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula da disciplina de instabilidade de estruturas**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón Armado**. Barcelona, Espanha- Gustavo Gili, 2000.

PALLARÉS, L.; MIGUEL, P. F.; FÉRNANDEZ-PRADA, M. A. A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits. **Engineering Structures**, v.31, p. 3065-3071, 2009.

RAFFAELE, D.; UVA, G.; PORCO, F.; FIORE, A. Buckling of Rectangular Isolated R. C. Columns- Closed-form Approximation for Interaction Domains. **The Open Construction and Building Technology Journal**, v.7, p. 129-137, 2013.

RIBEIRO, K. **Diagramas para verificação de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexão composta normal**. Dissertação de Mestrado- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 308 p., Florianópolis, 2011.

RODRIGUES, R. VAZ. A new technique for ultimate limit design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending. **Engineering Structures**, v.104, p. 1-17, 2015.

SANTOS, L. M. **Sub-rotinas básicas de dimensionamento de concreto armado**. São Paulo- Thot, 1994.

SIMÃO, P. D.; BARROS, H.; FERREIRA, C. C.; MARQUES, T. Closed-form moment-curvature relations for reinforced concrete cross sections under bending moment and axial force. **Engineering Structures**, v. 129, p. 67-80, 2016.

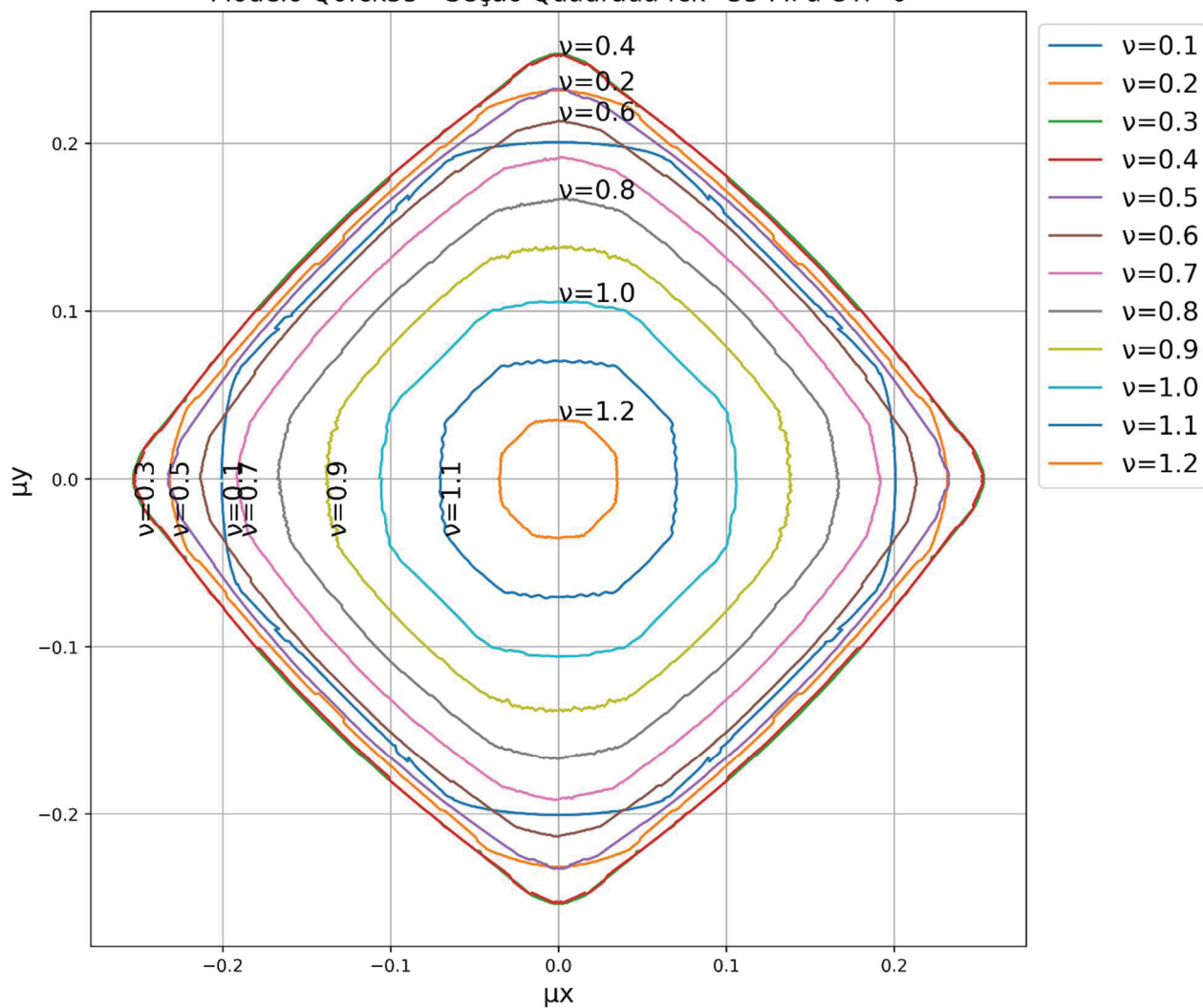
TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw-Hill, 1963.

TORRICO, F. A. **Análise teórica e experimental do comportamento de pilares esbeltos de concreto de alta resistência, considerando a ductilidade**. Tese de Doutorado- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 345 p., São Carlos, 2010.

APÊNDICE A - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO QUADRADA

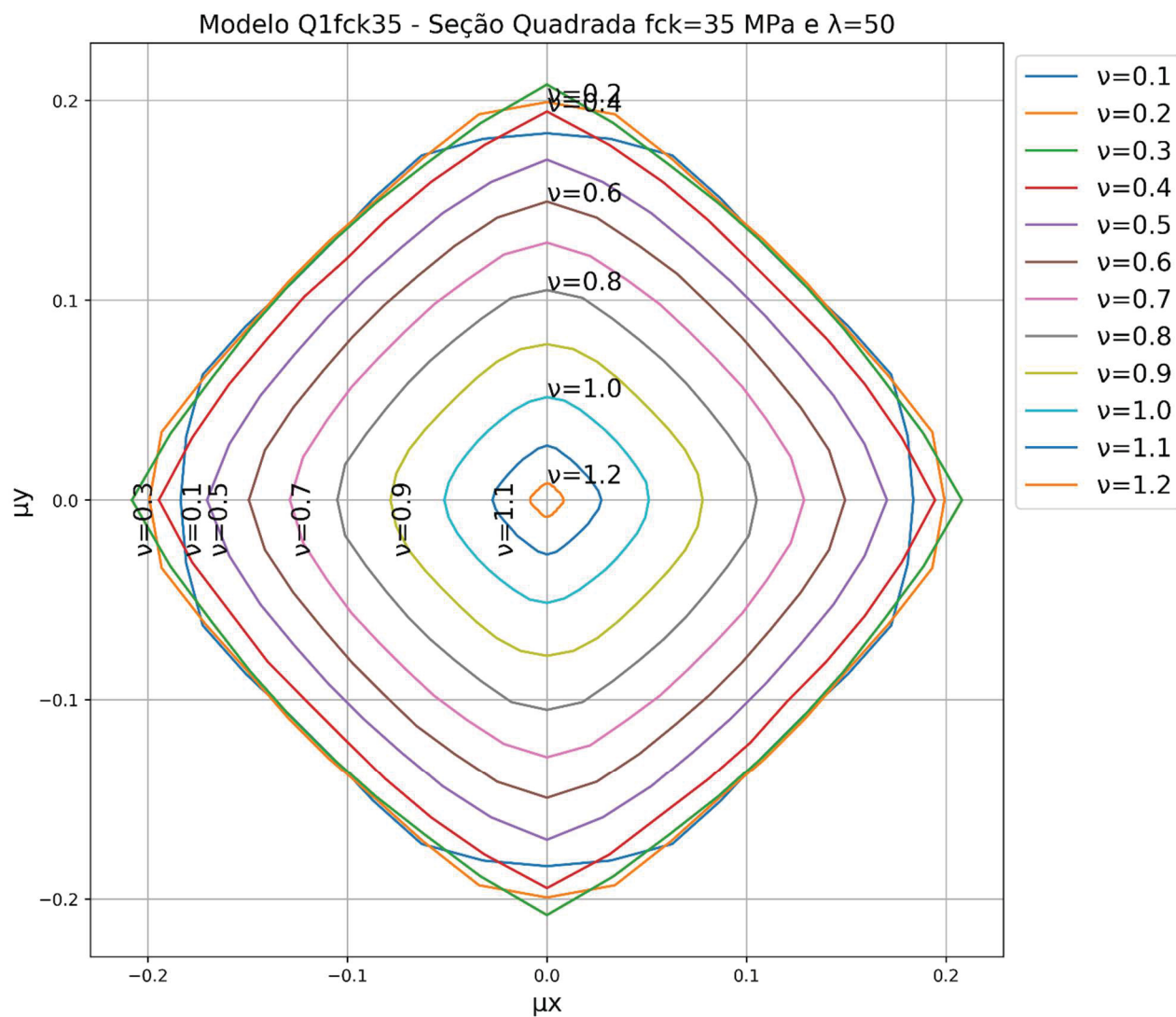
FIGURA 80 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=0$)

Modelo Q0fck35 - Seção Quadrada fck=35 MPa e $\lambda=0$



FONTE: O autor (2017).

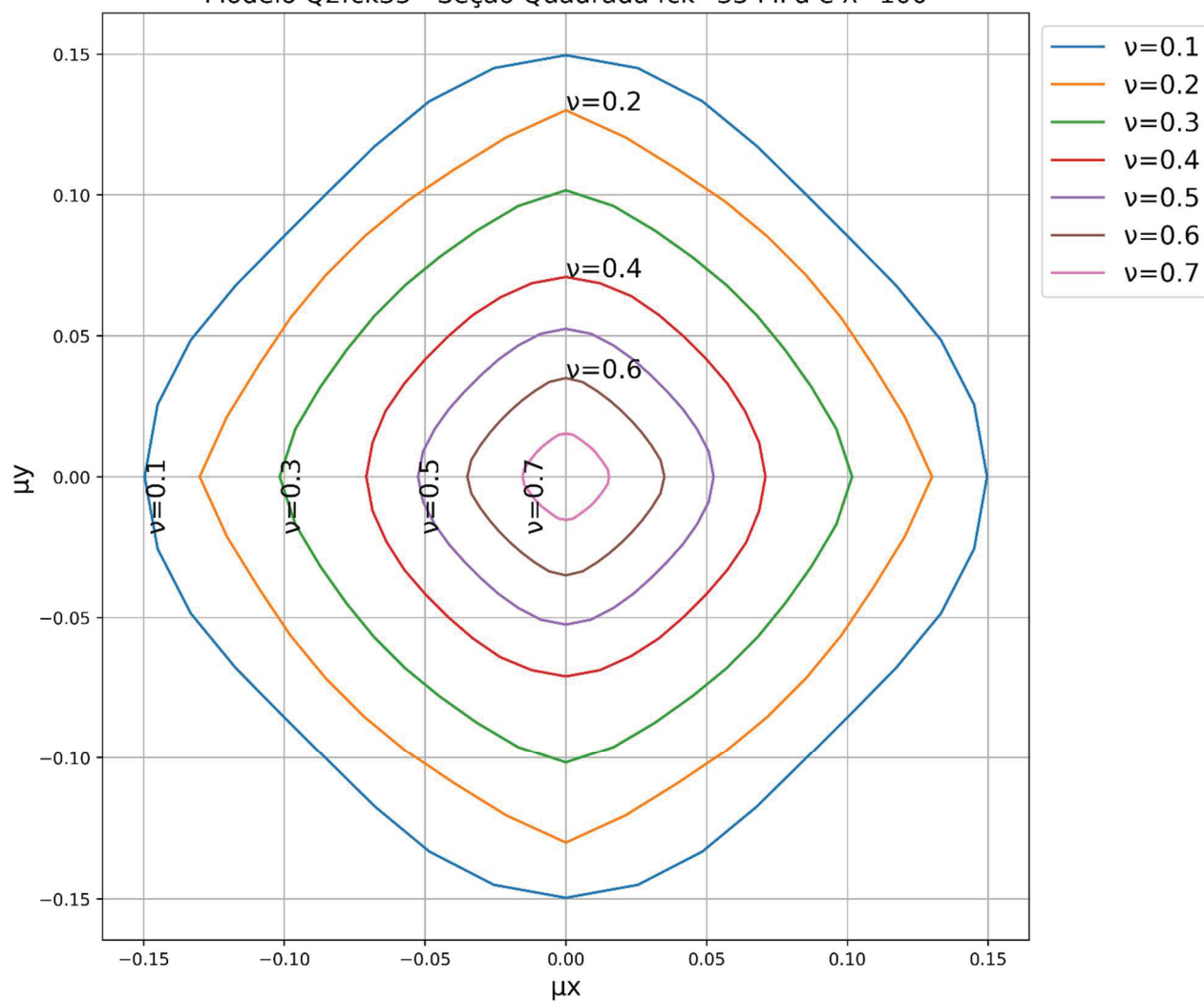
FIGURA 81 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 82 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=100$)

Modelo Q2fck35 - Seção Quadrada fck=35 MPa e $\lambda=100$



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 83 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 35MPa E $\lambda=200$)

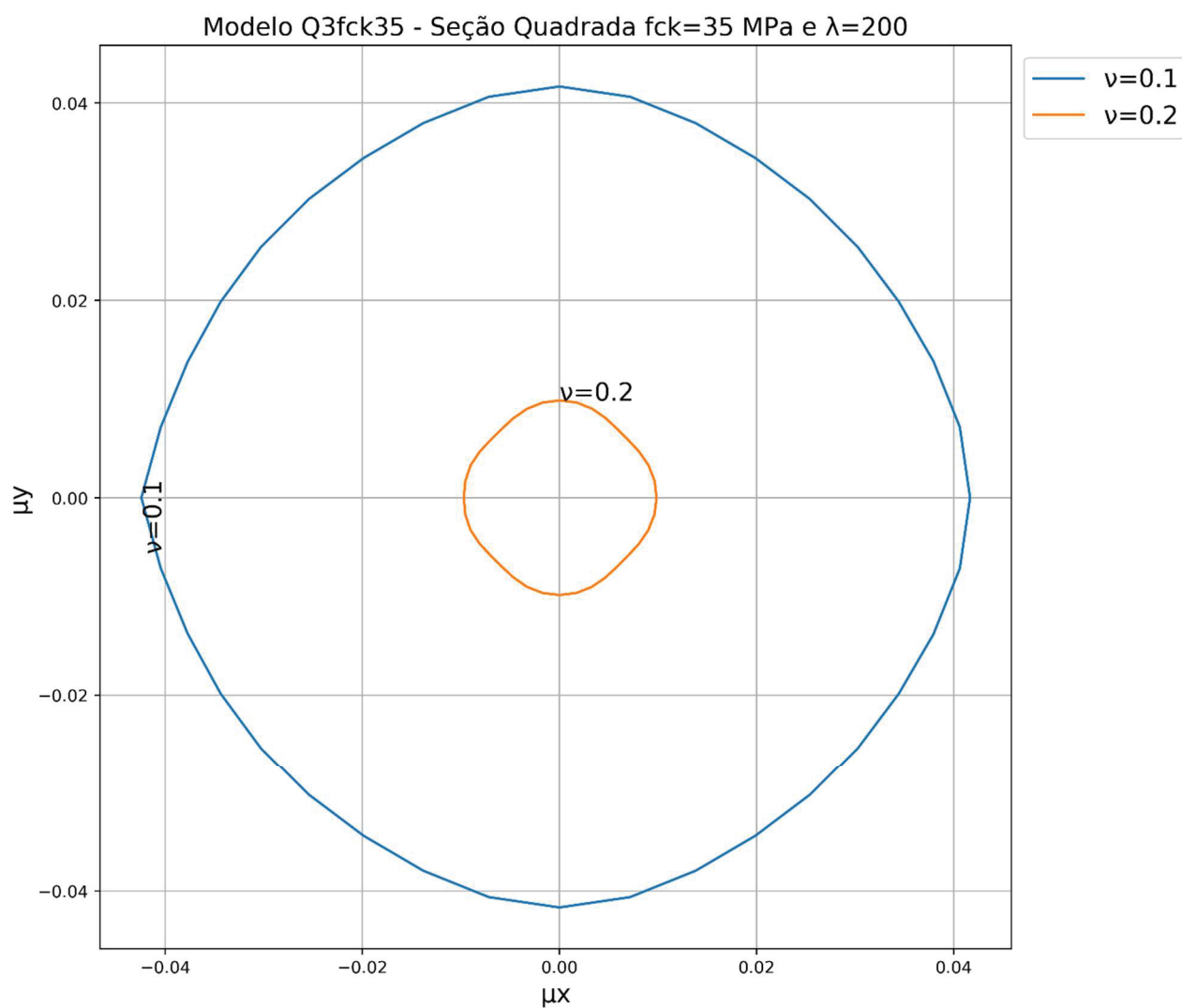
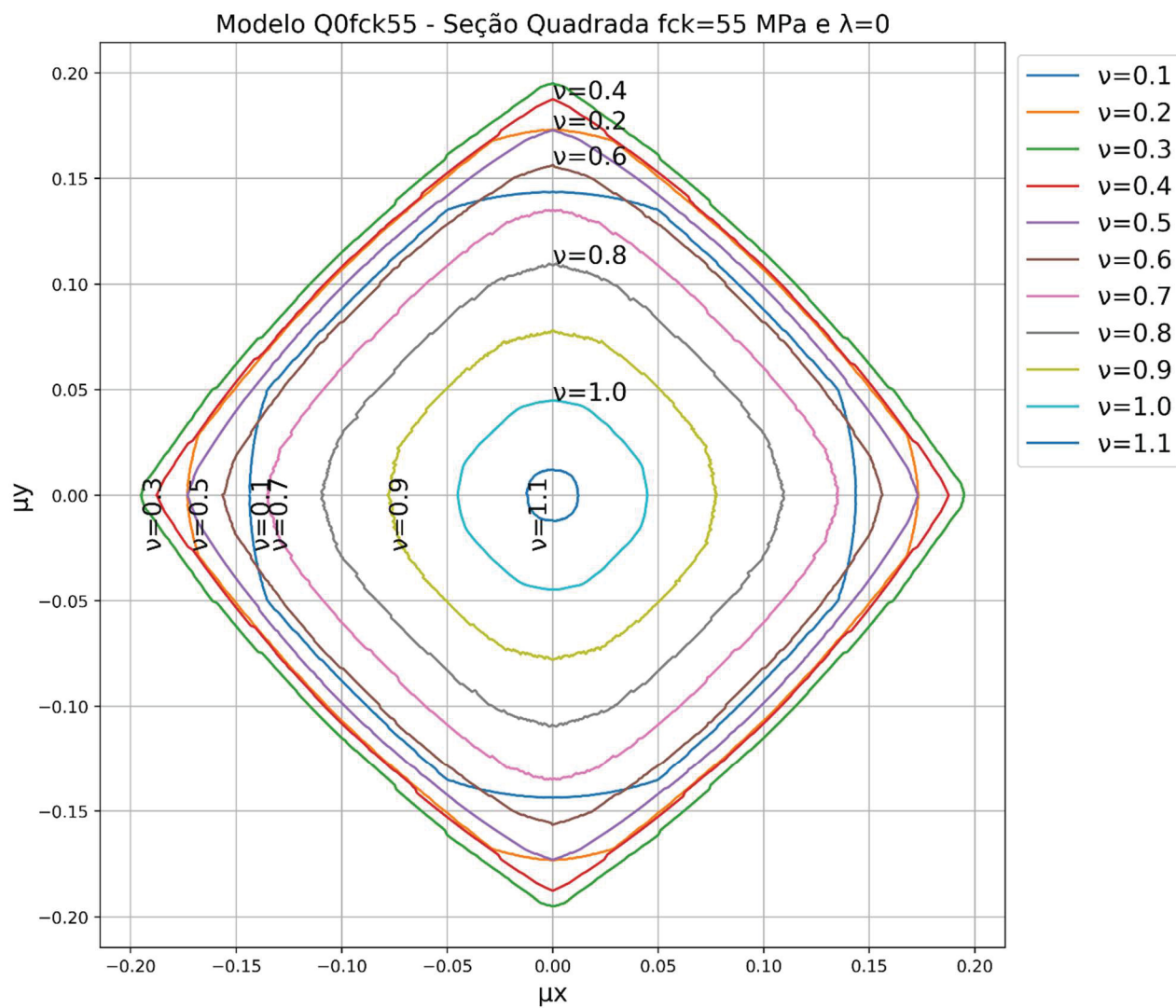
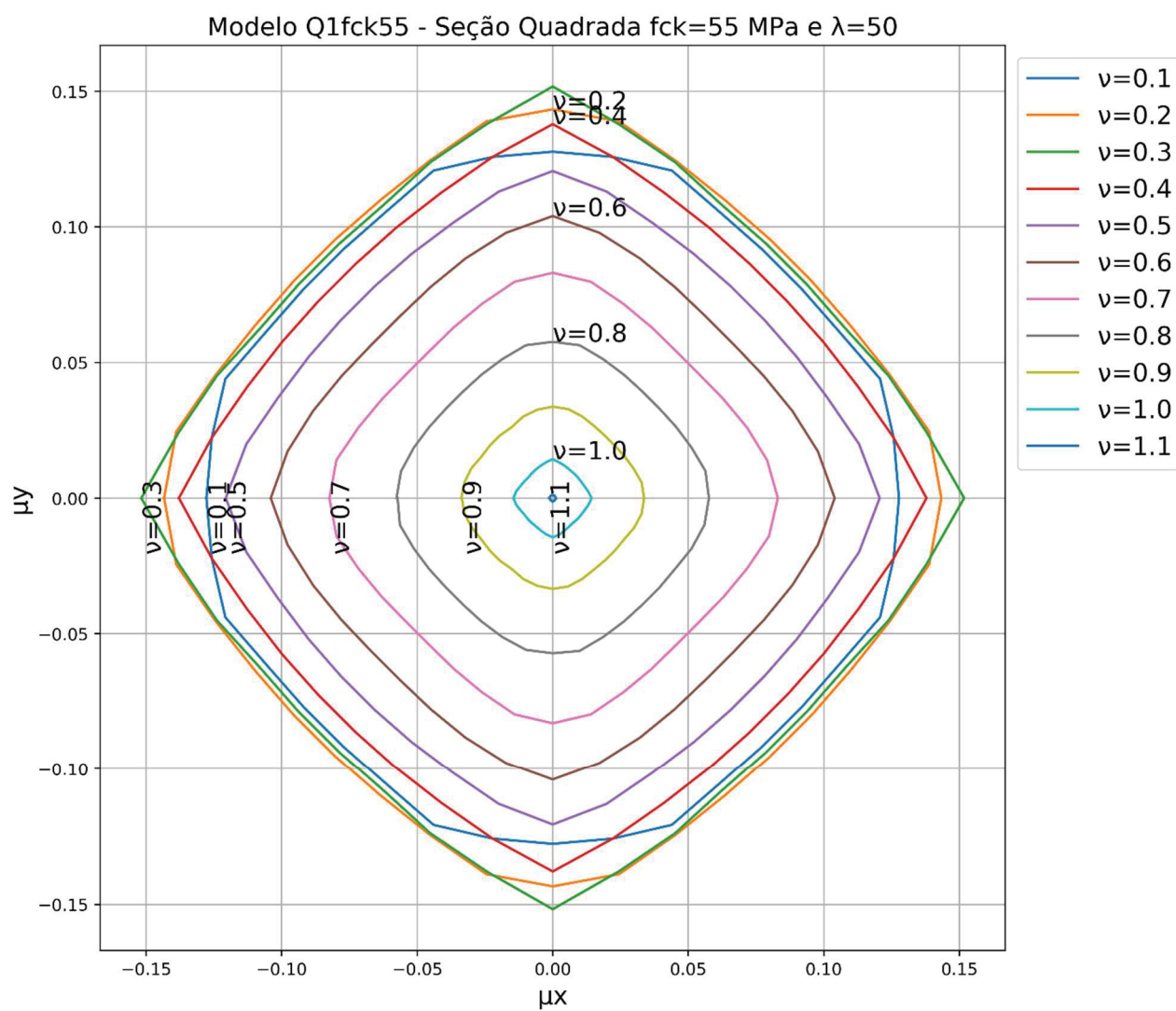


Figura 84 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=0$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 85 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 86 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=100$)

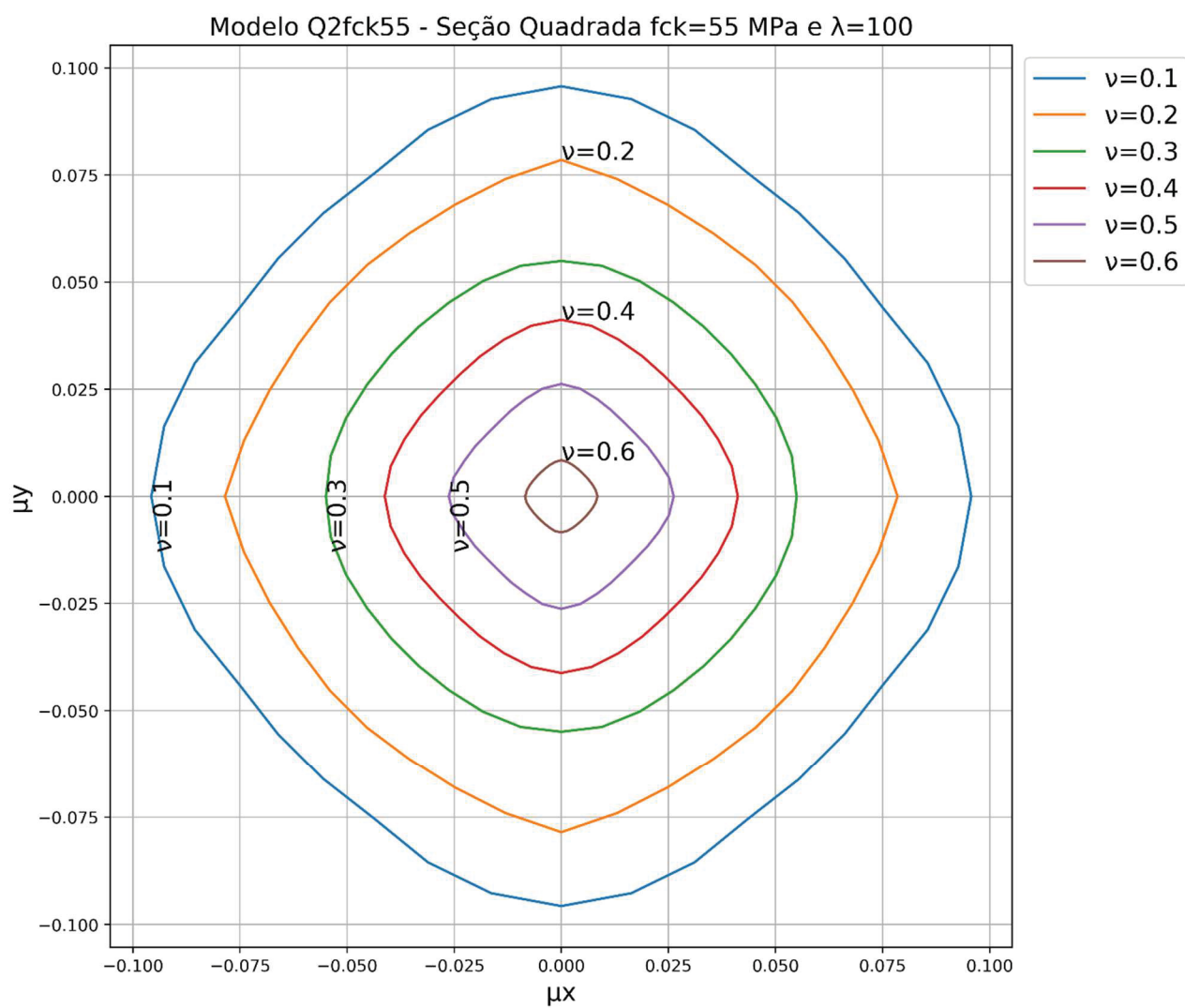


FIGURA 87 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 55 MPa E $\lambda=200$)

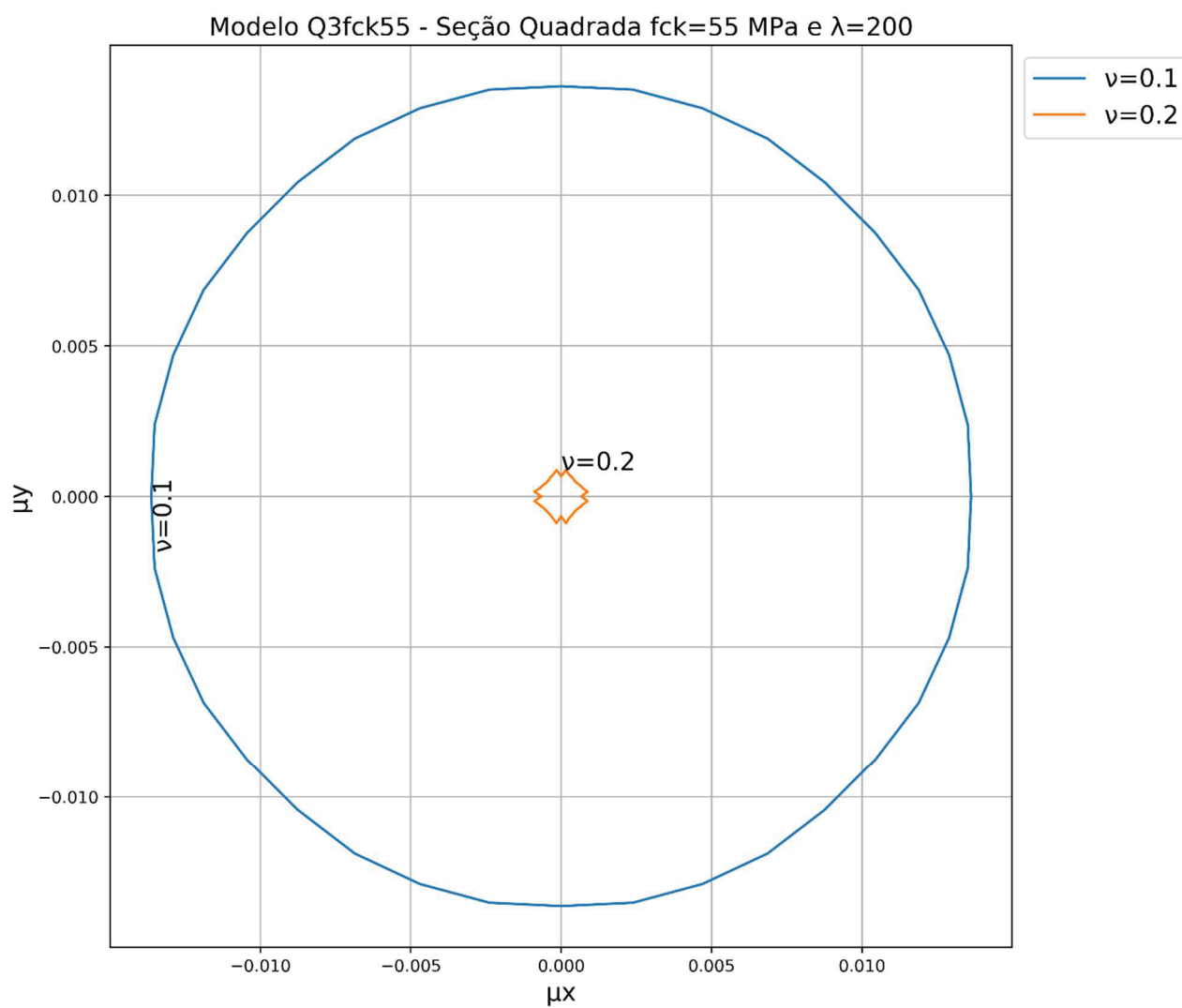
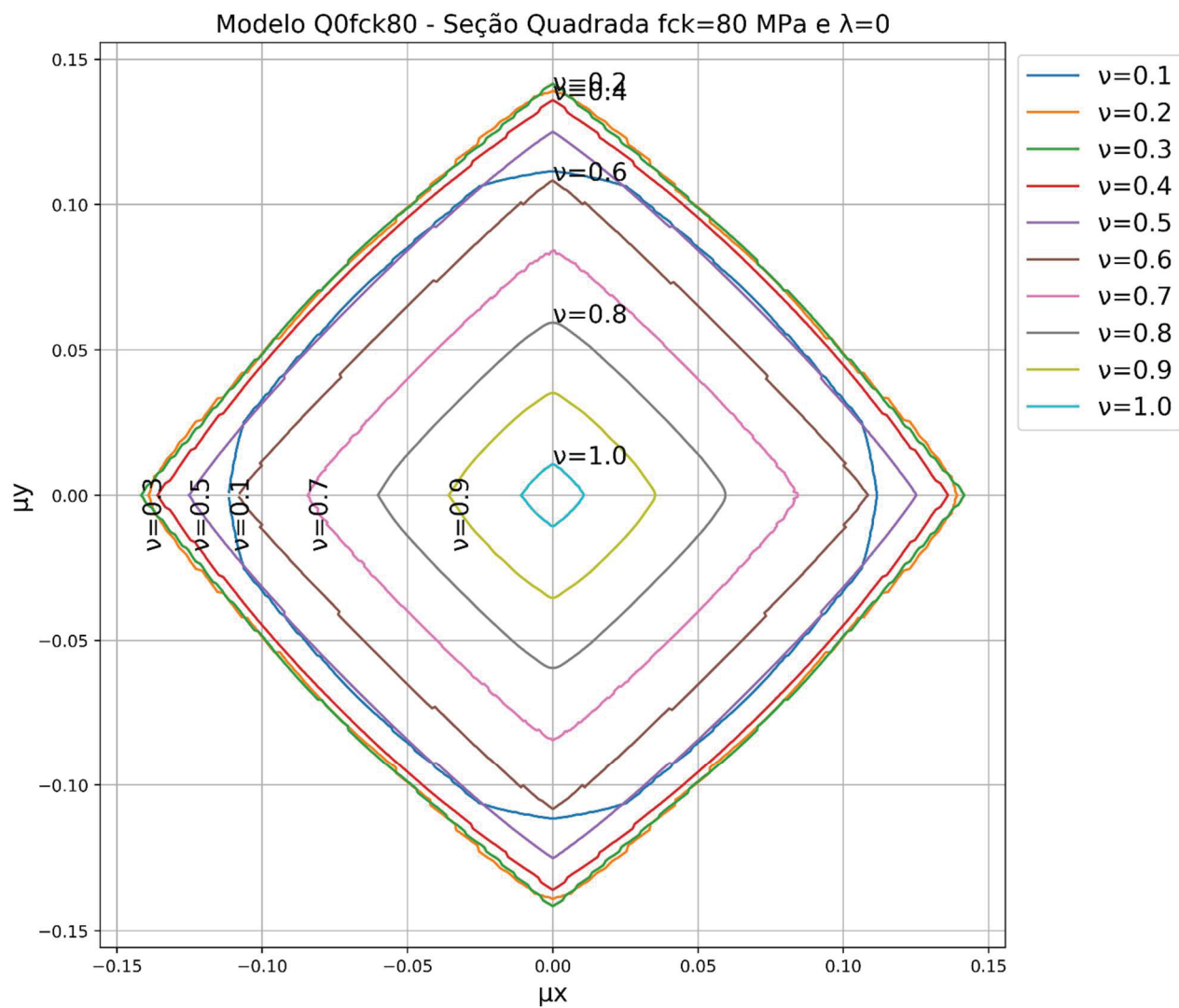
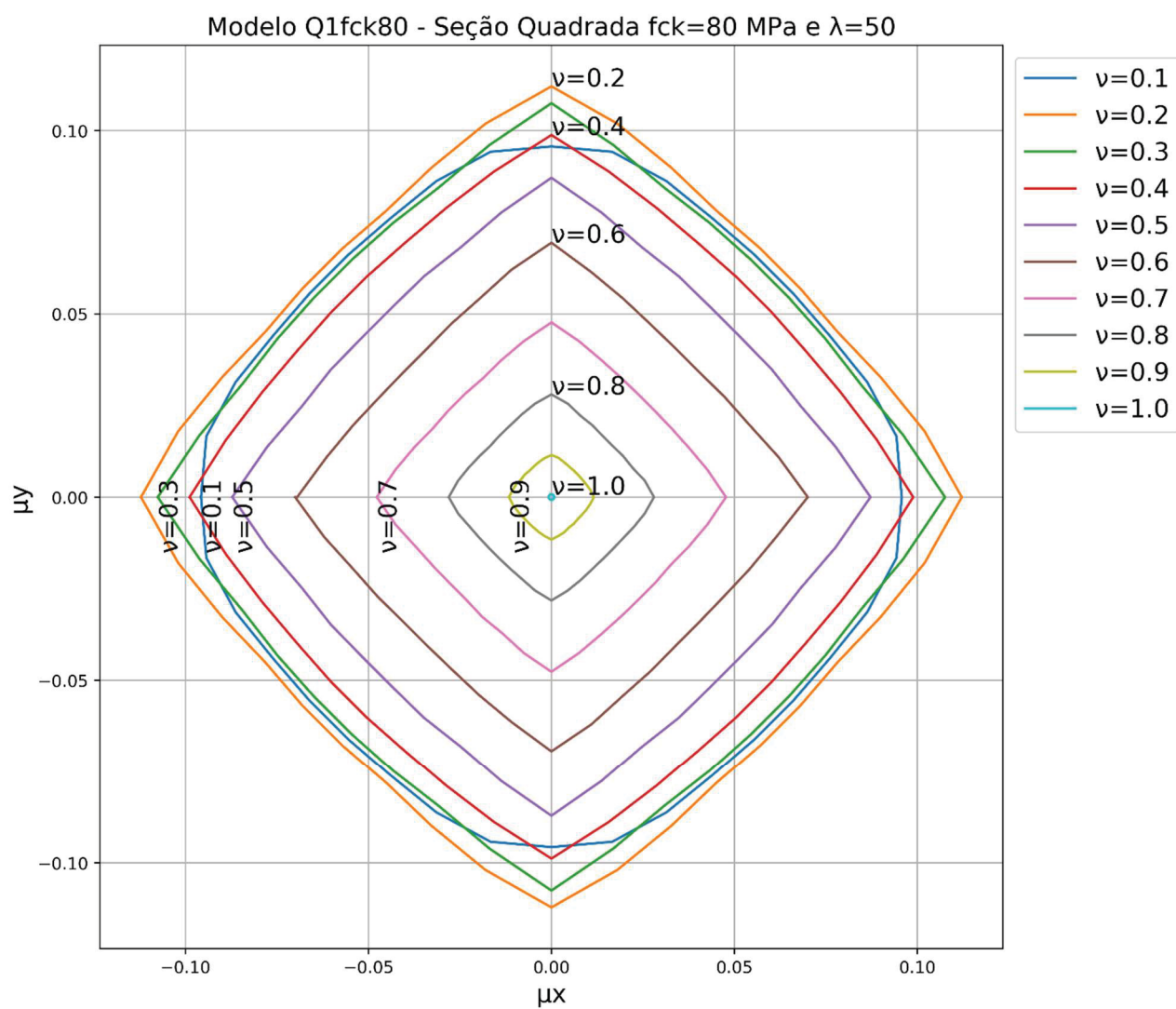


FIGURA 88 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q0 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=0$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 89 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q1 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 90 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q2 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)

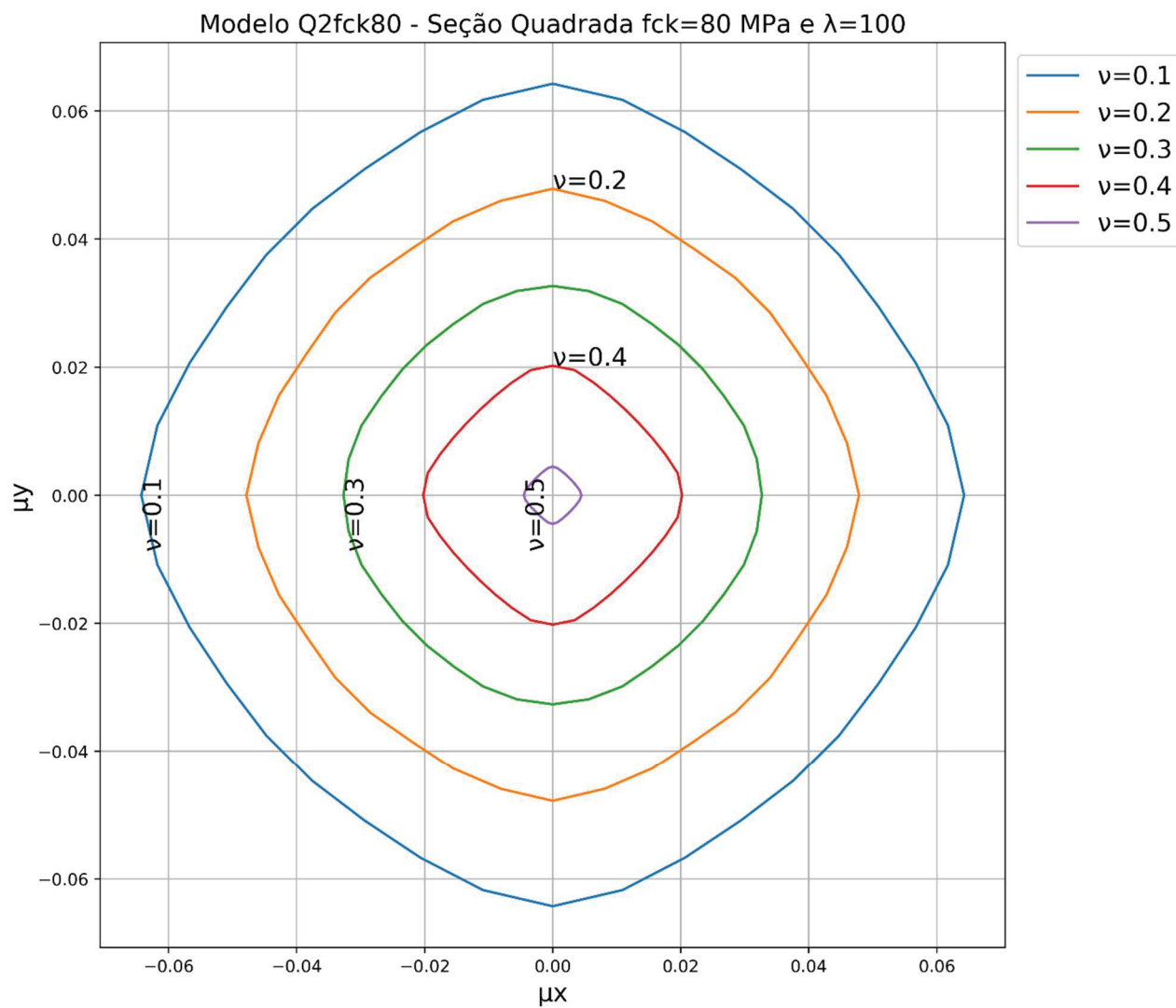
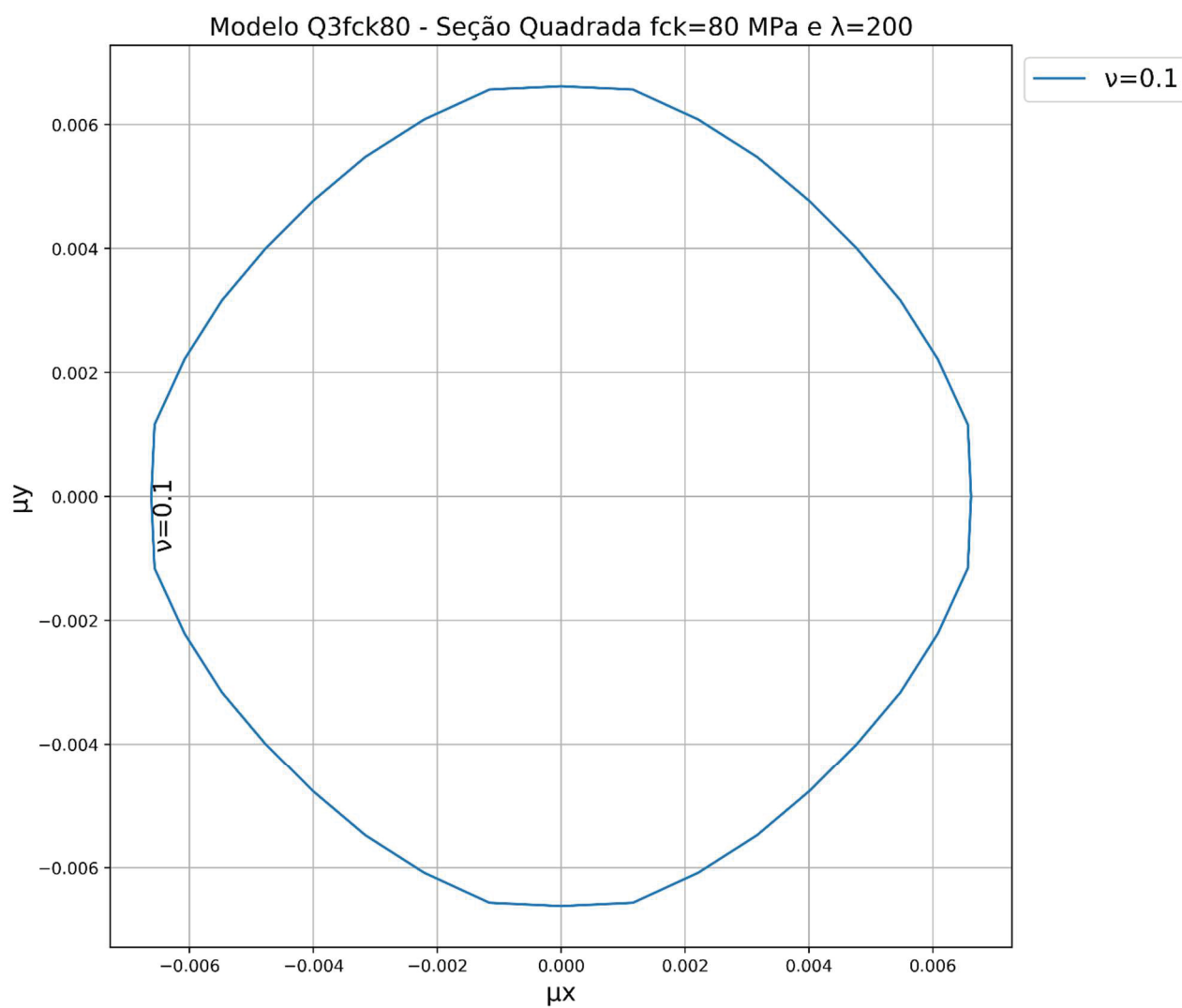


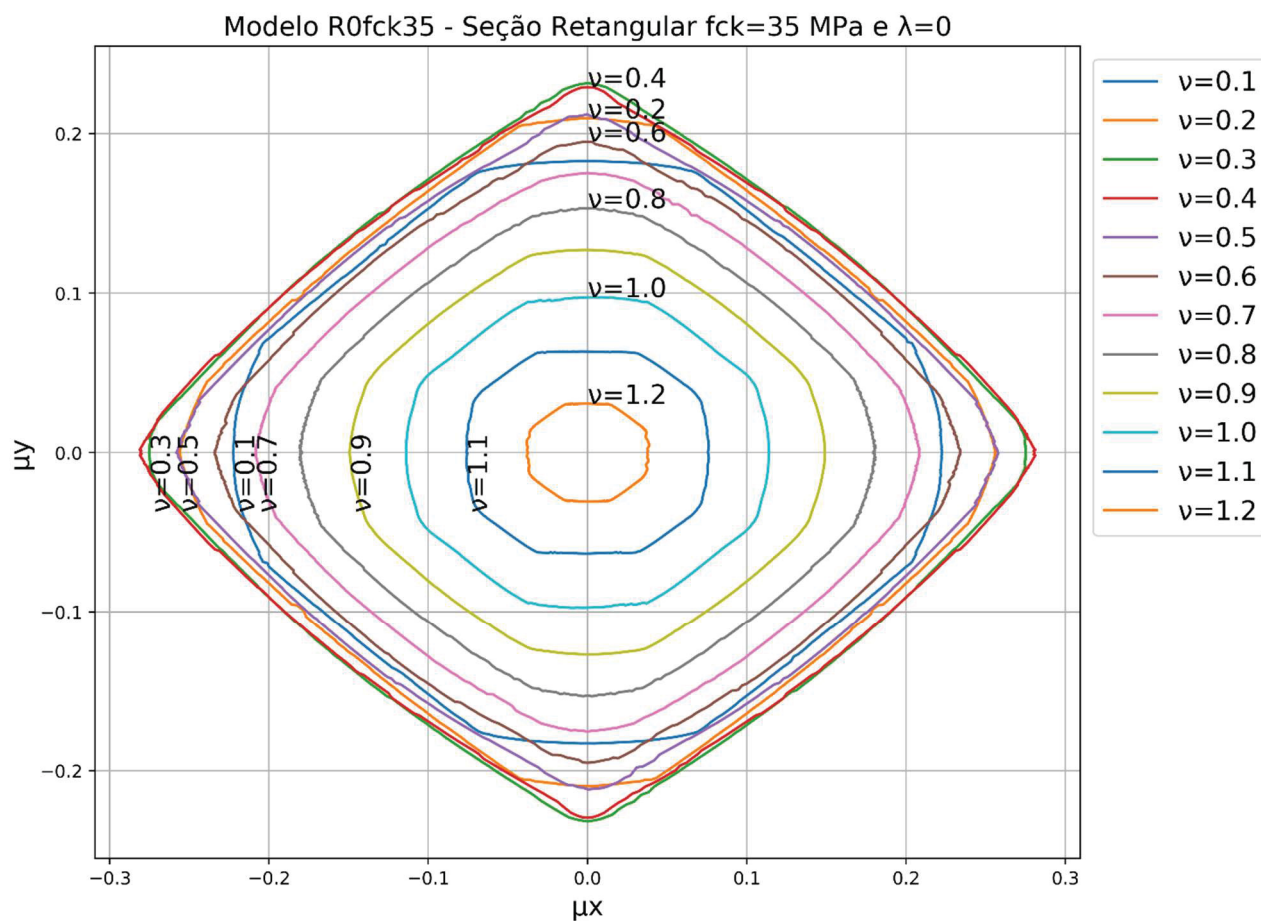
FIGURA 91 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO Q3 (PILAR DE SEÇÃO QUADRADA, FCK DE 80 MPa E $\lambda=200$)



FONTE: O autor (2017).

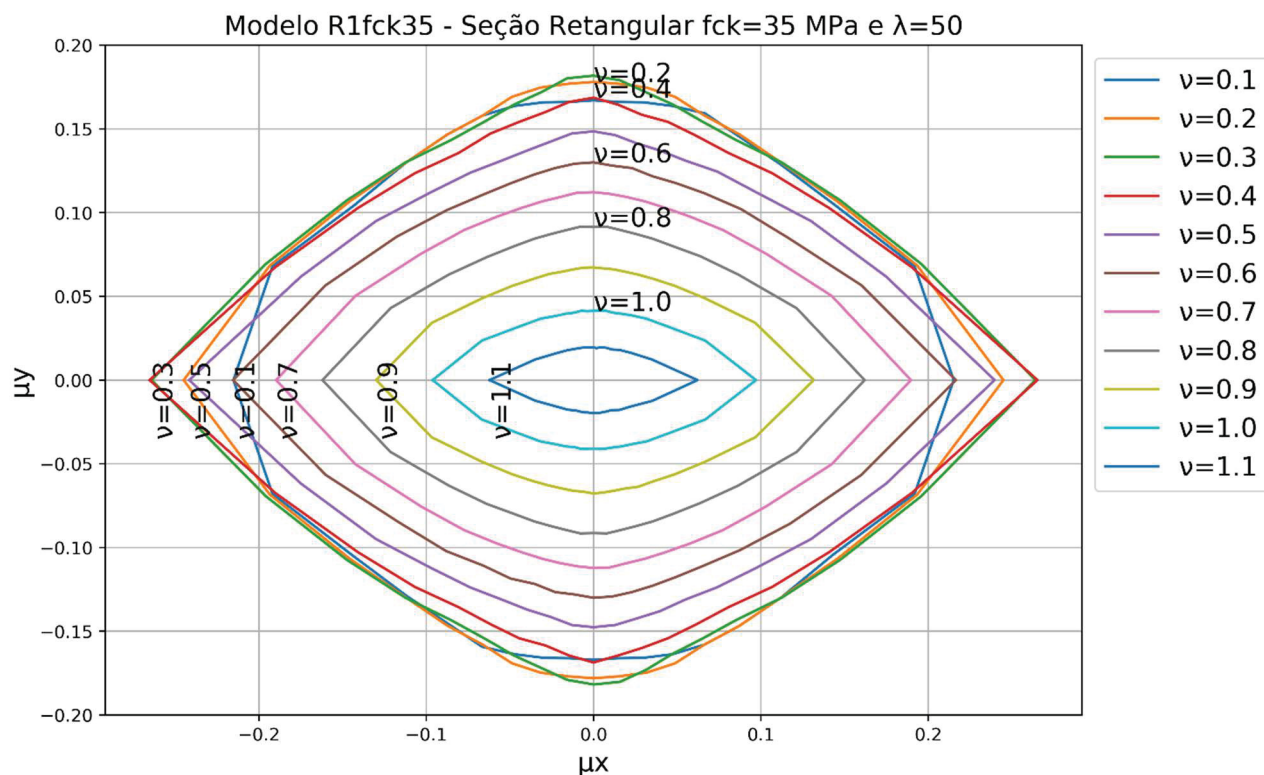
APÊNDICE B - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO RETANGULAR

FIGURA 92 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R0 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPa E $\lambda=0$)



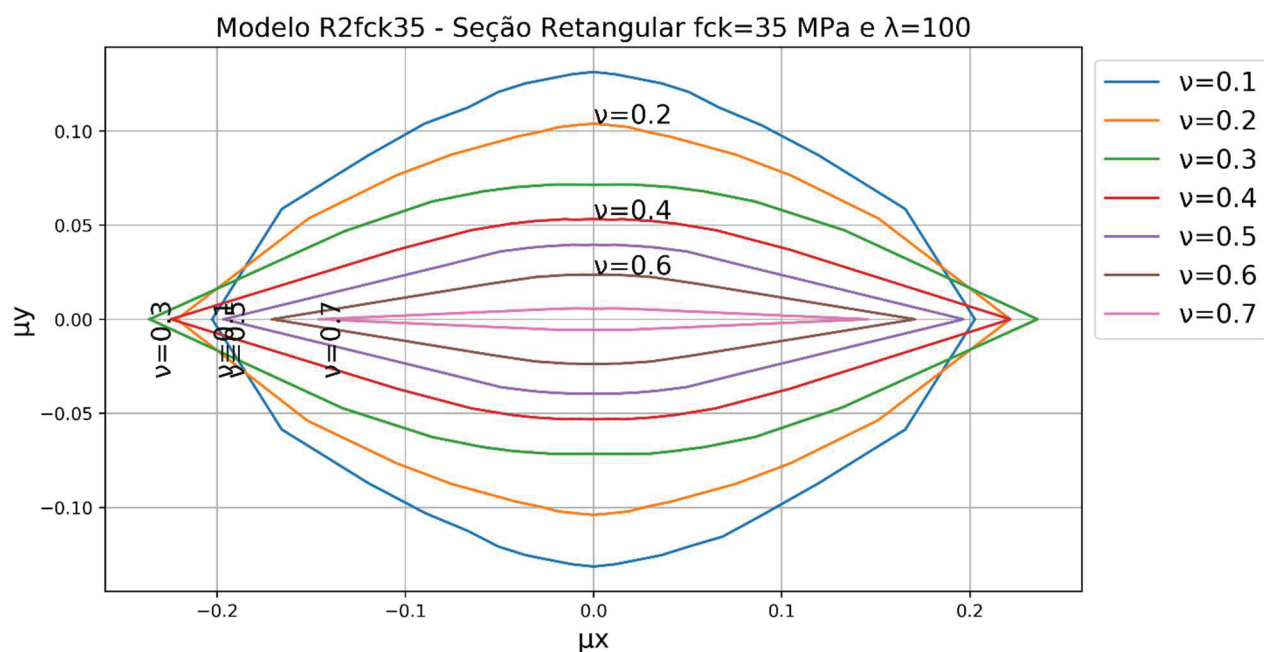
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 93 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 94 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 95 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R2 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPa E $\lambda=100$)

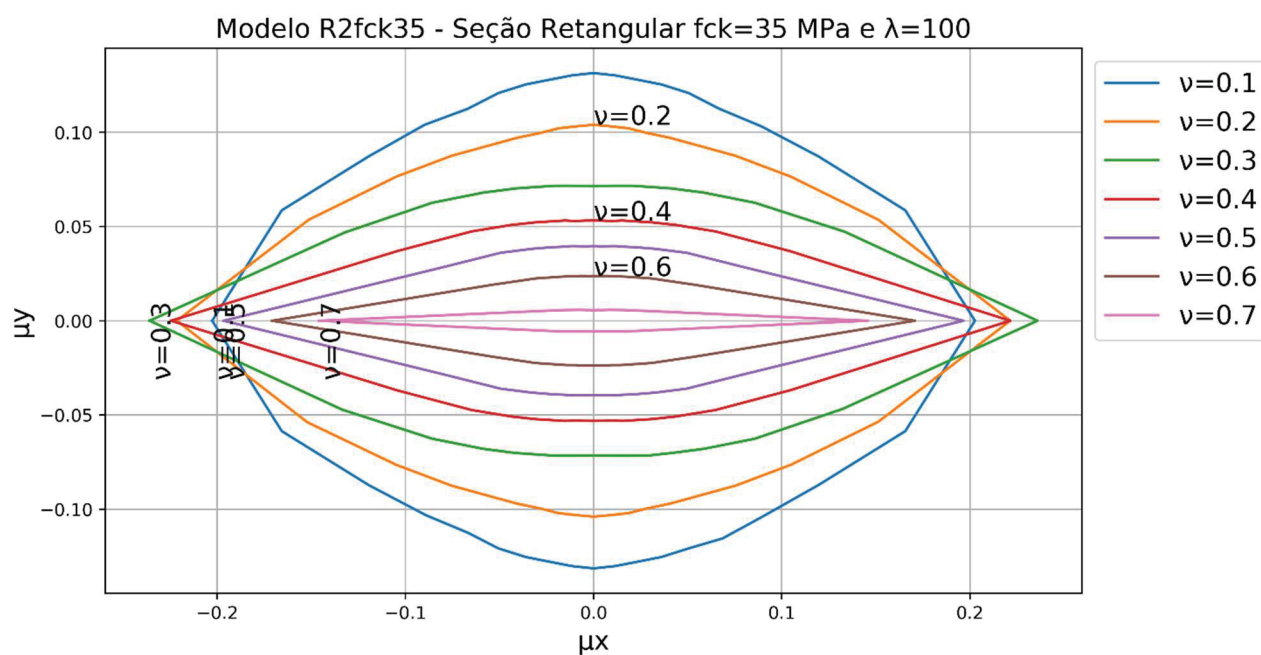


FIGURA 96 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R3 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 35 MPa E $\lambda=200$)

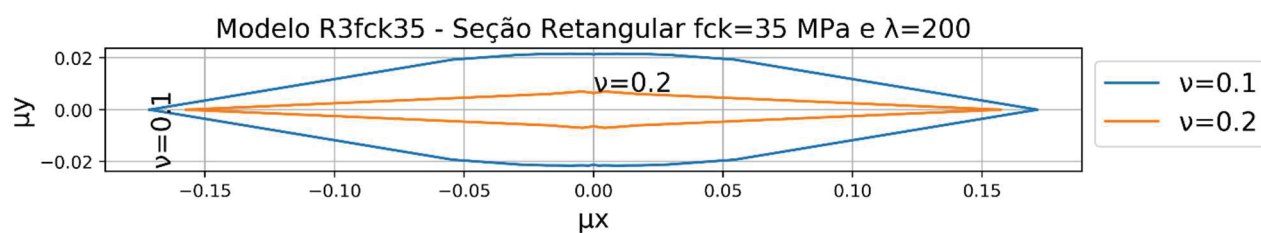
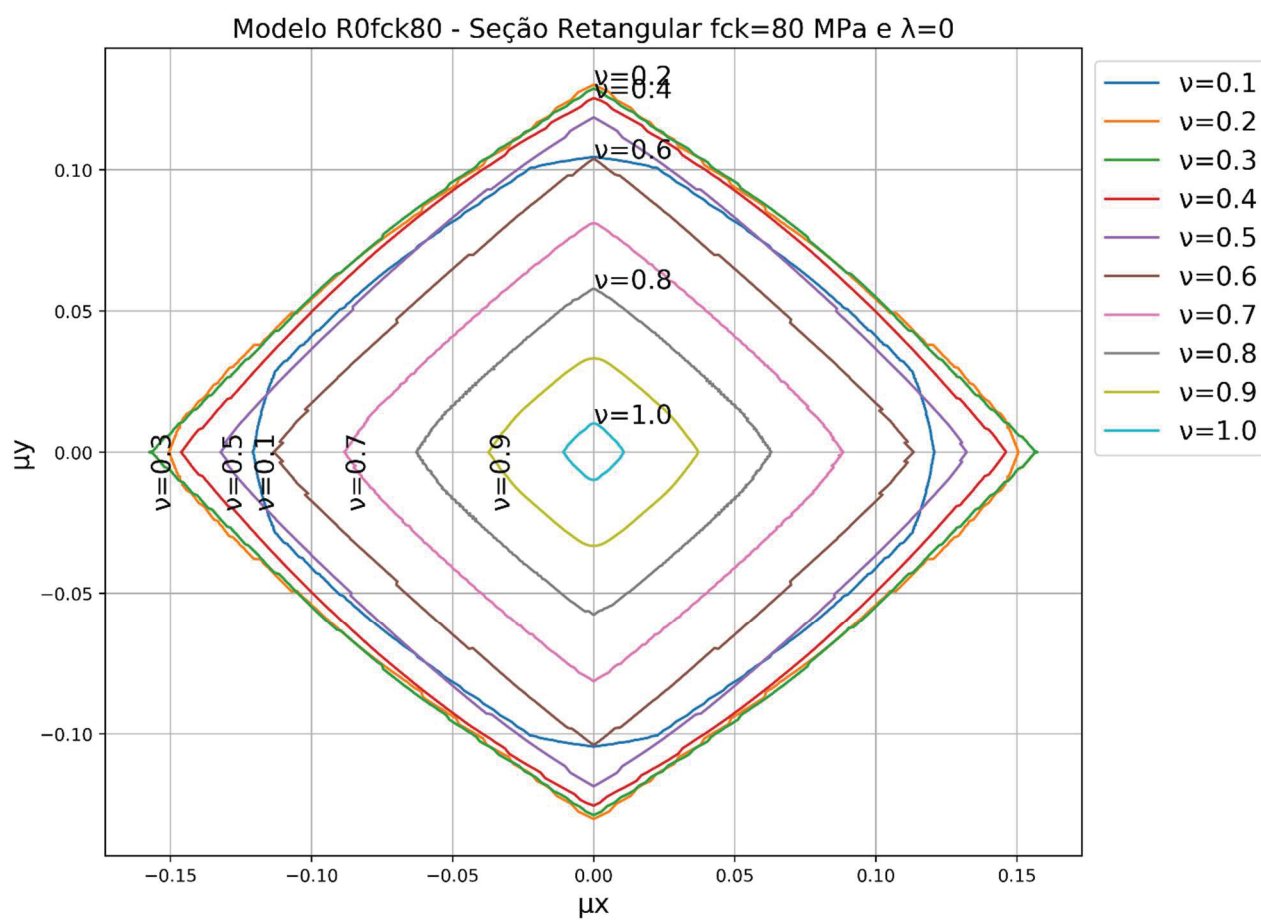
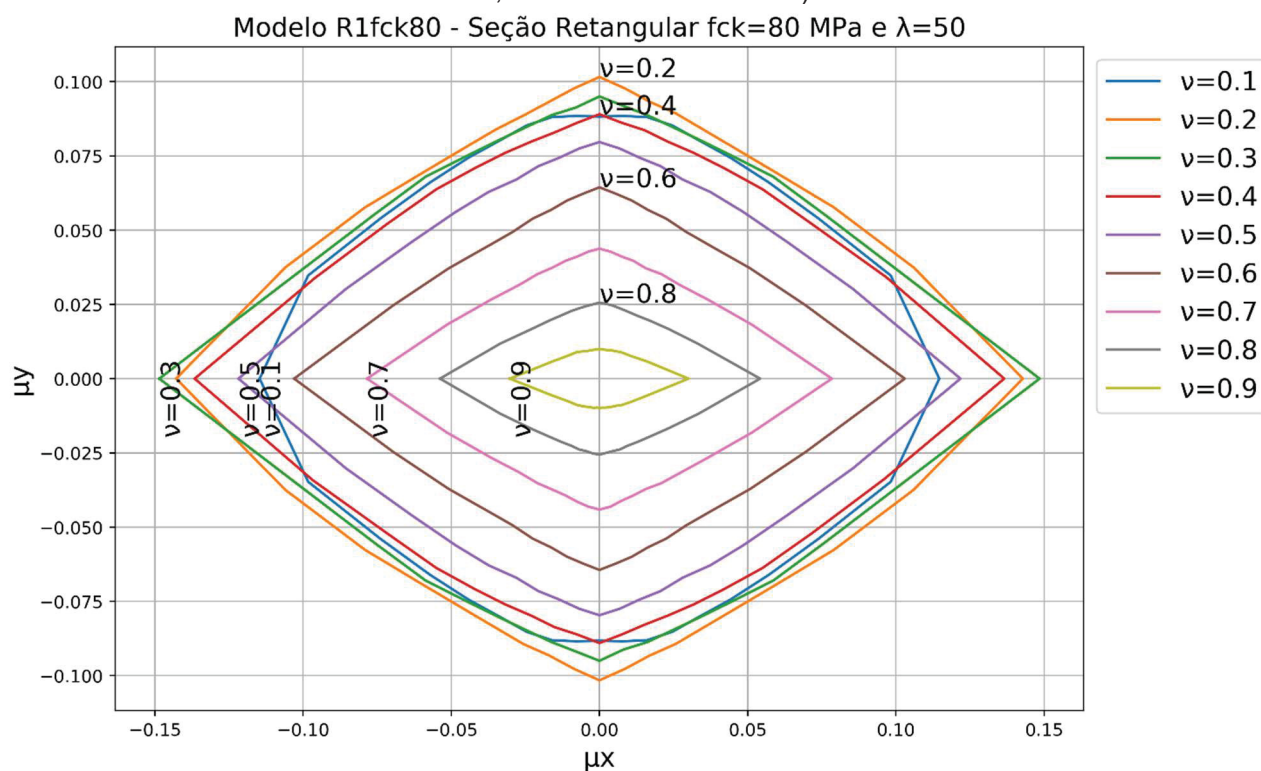


FIGURA 97 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R0 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPa E $\lambda=0$)



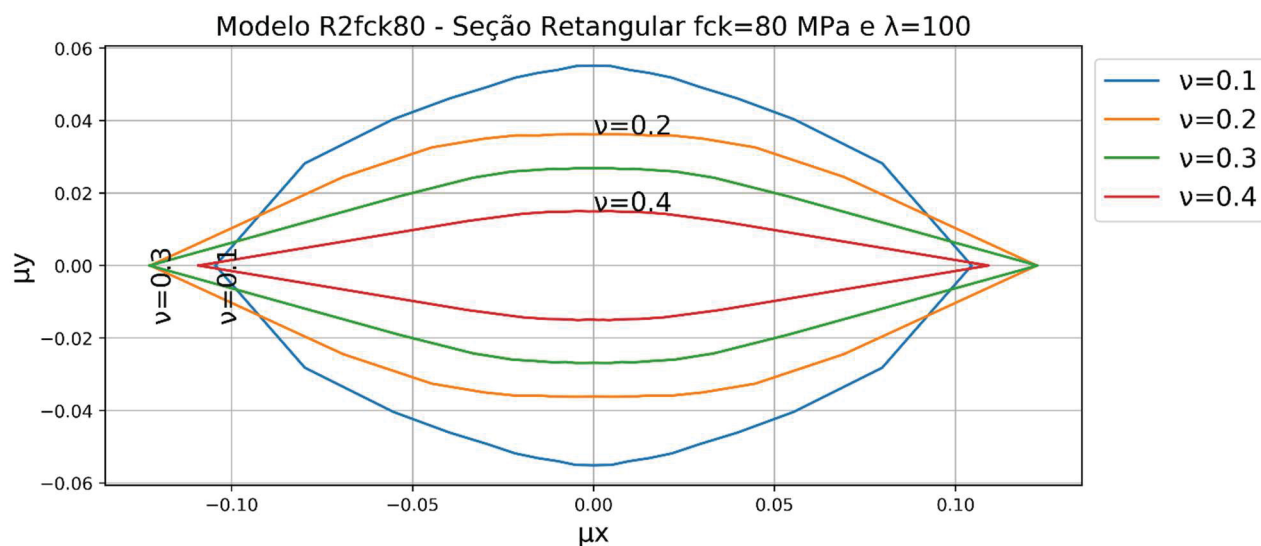
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 98 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R1 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)



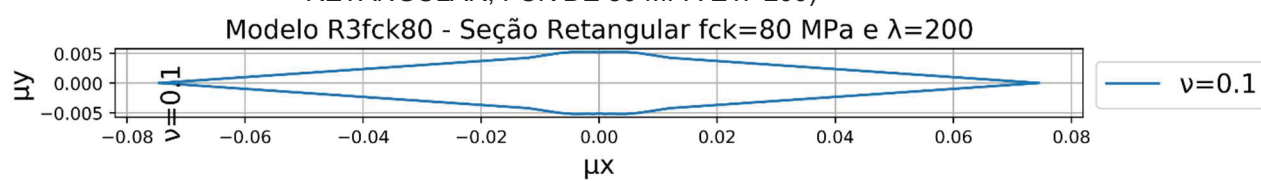
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 99 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R2 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 100 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO R3 (PILAR DE SEÇÃO RETANGULAR, FCK DE 80 MPa E $\lambda=200$)



FONTE: O autor (2017).

APÊNDICE C - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES ANALISADOS DE SEÇÃO EM CRUZ

FIGURA 101 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C0 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPa E $\lambda=0$)

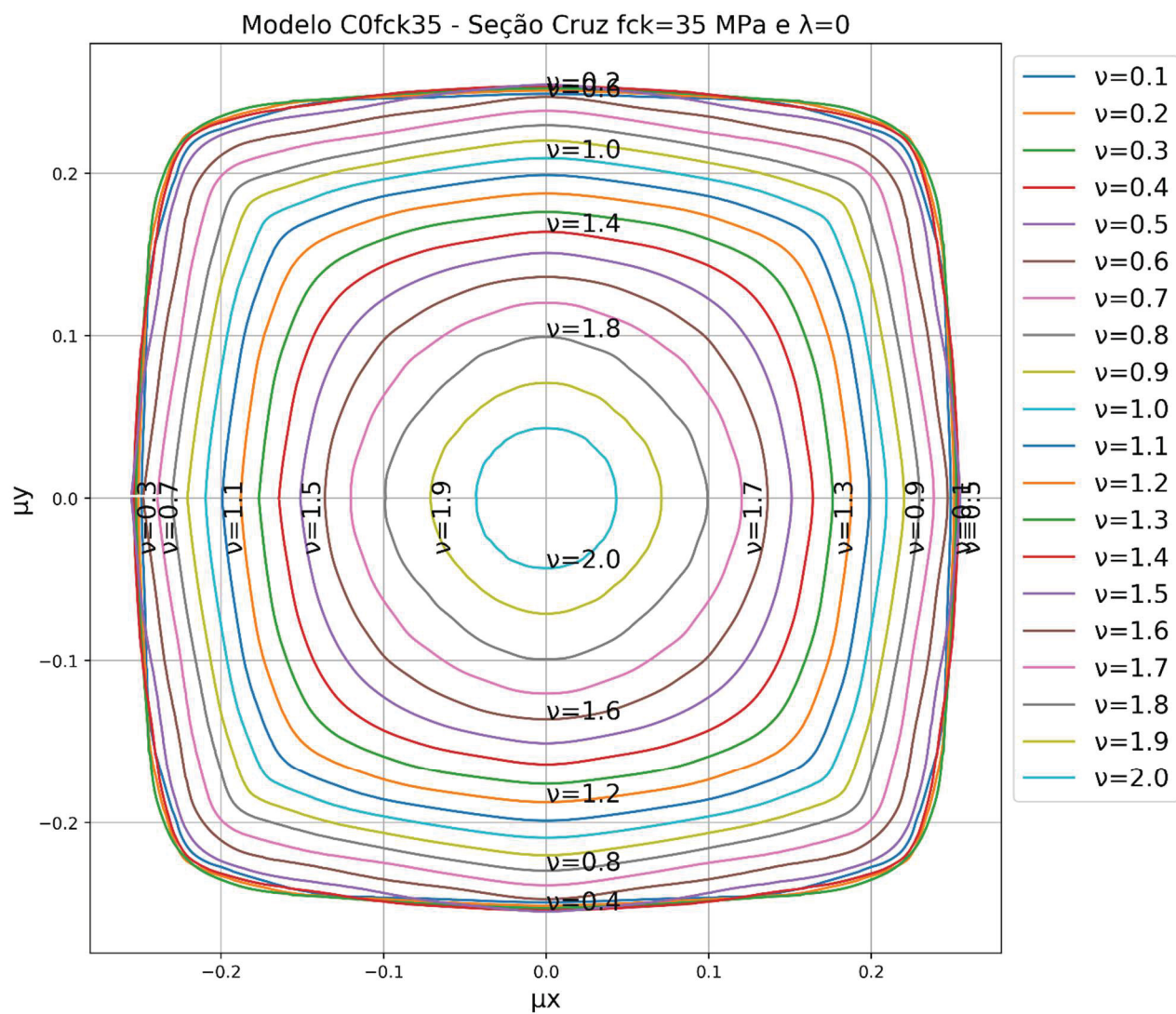
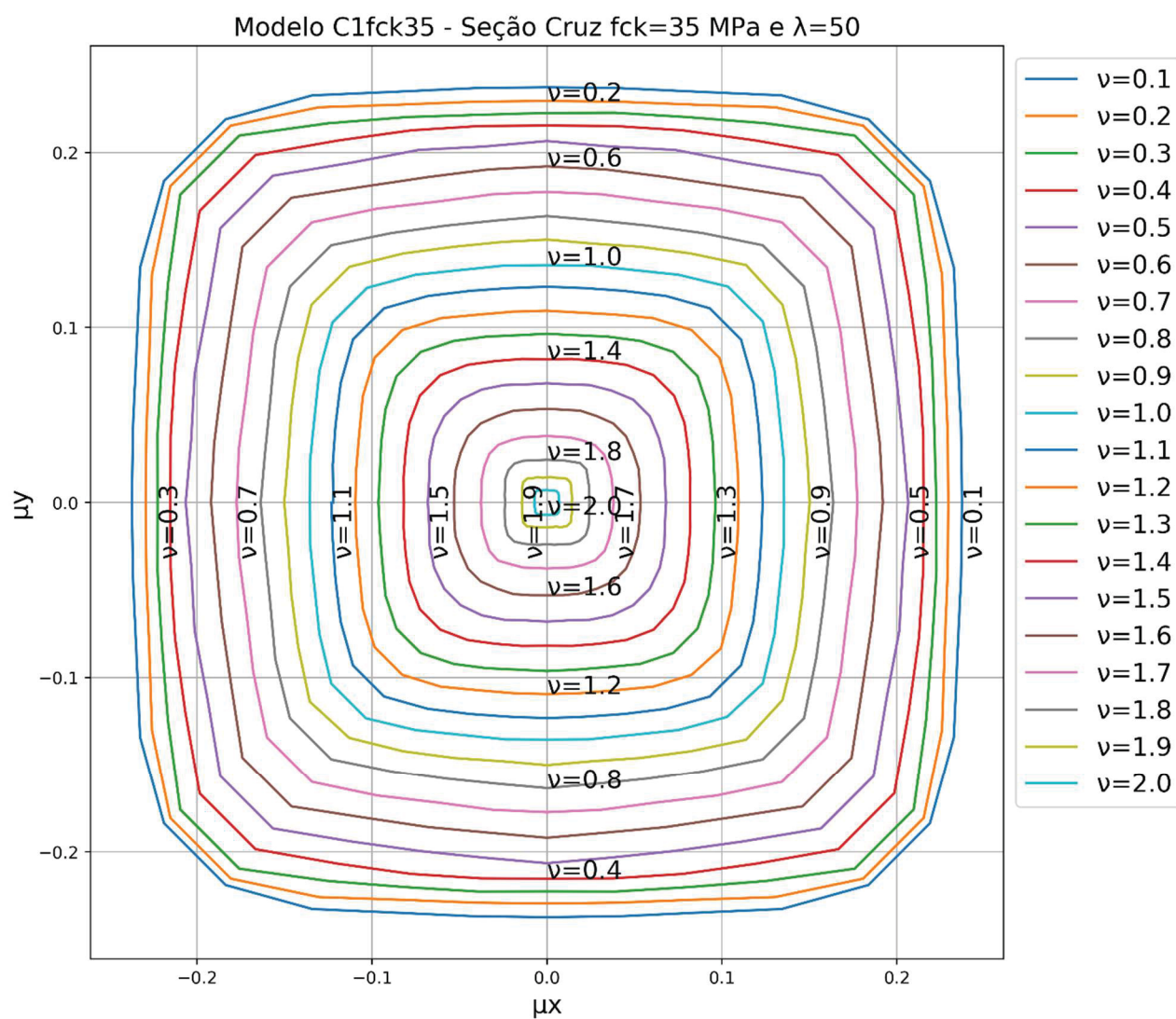
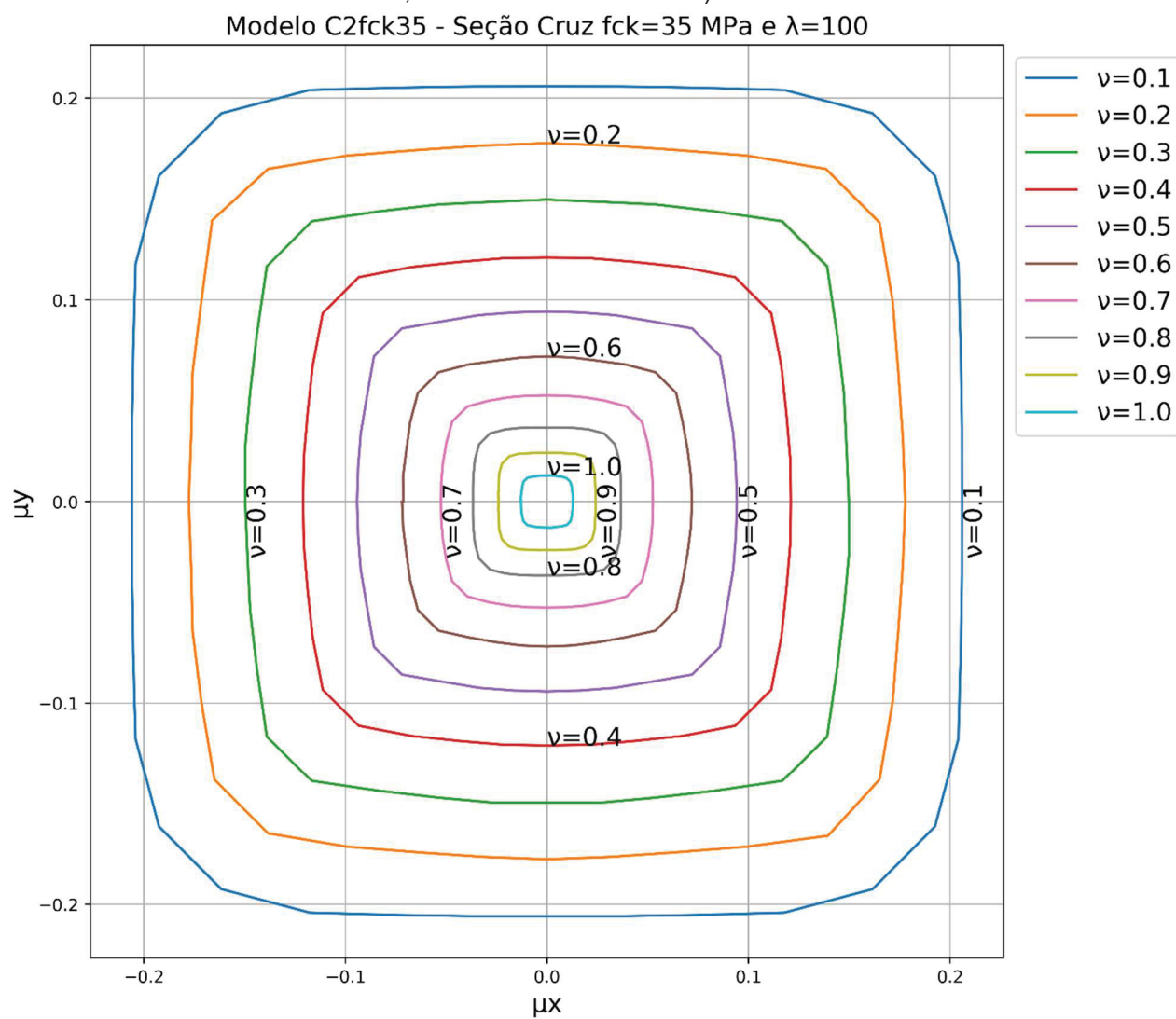


FIGURA 102 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C1 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPa E $\lambda=50$)



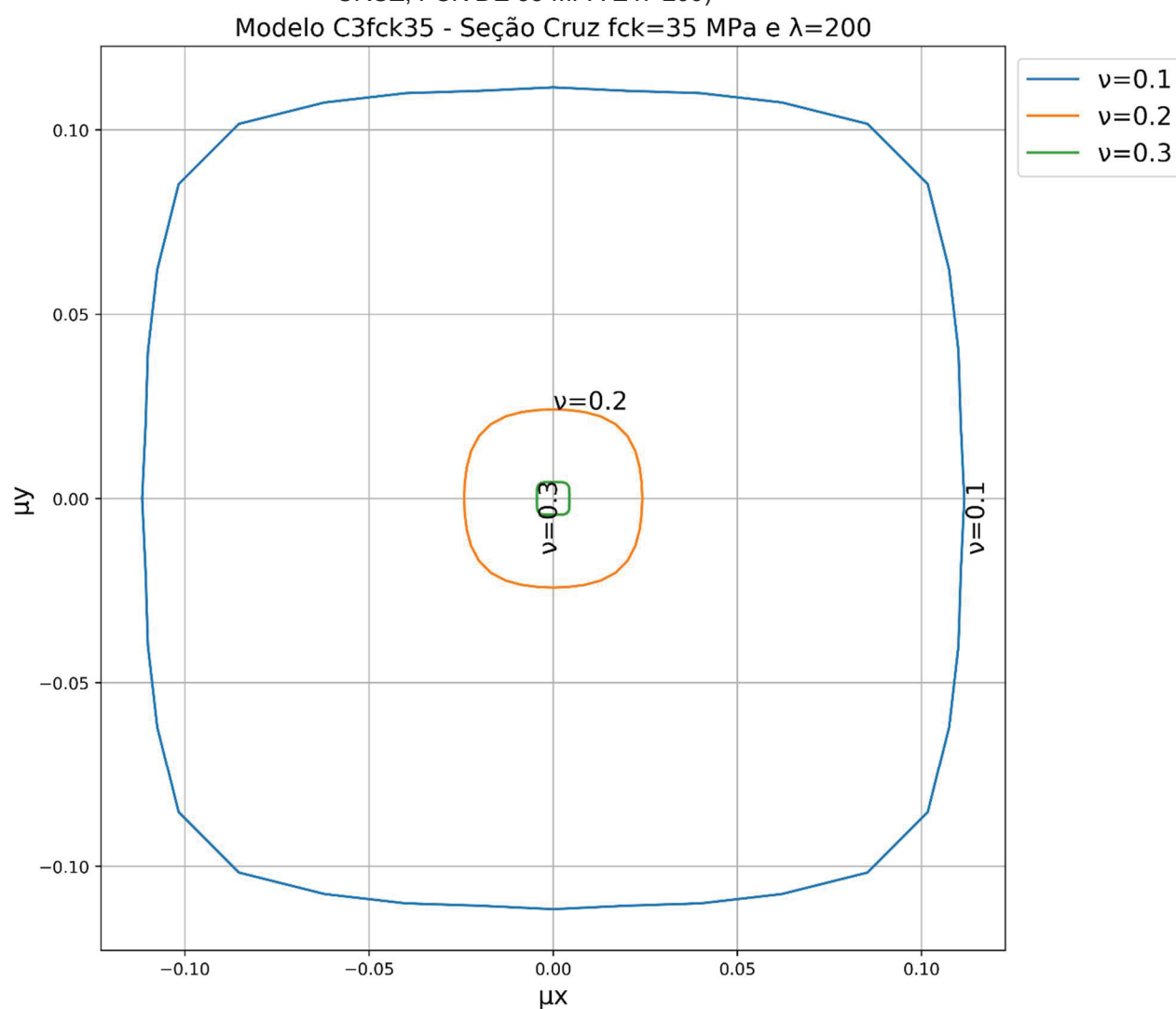
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 103 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C2 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 104 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C3 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 35 MPa E $\lambda=200$)



FONTE: O autor (2017).

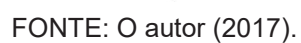
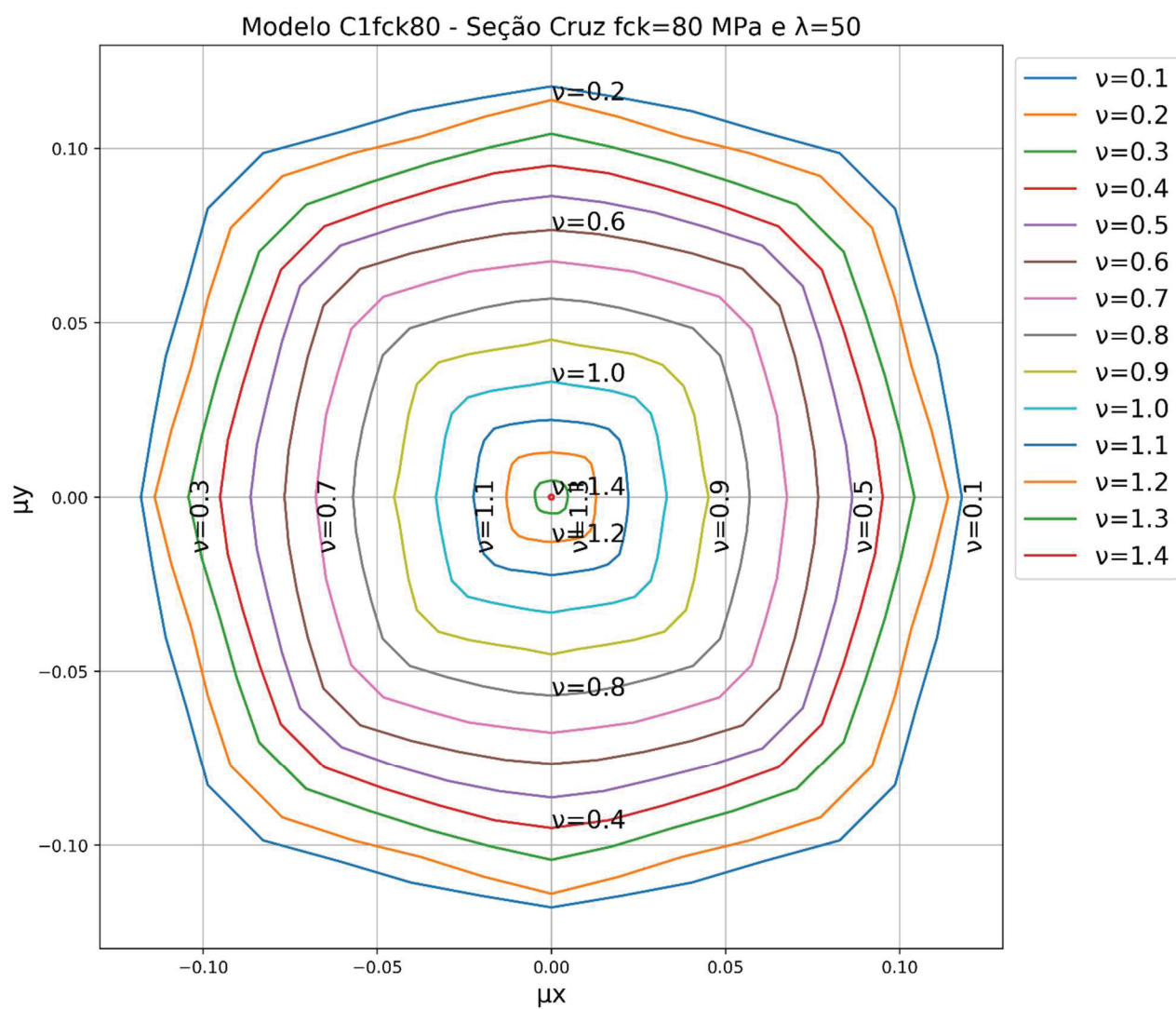


FIGURA 106 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C1 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 107 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C2 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)

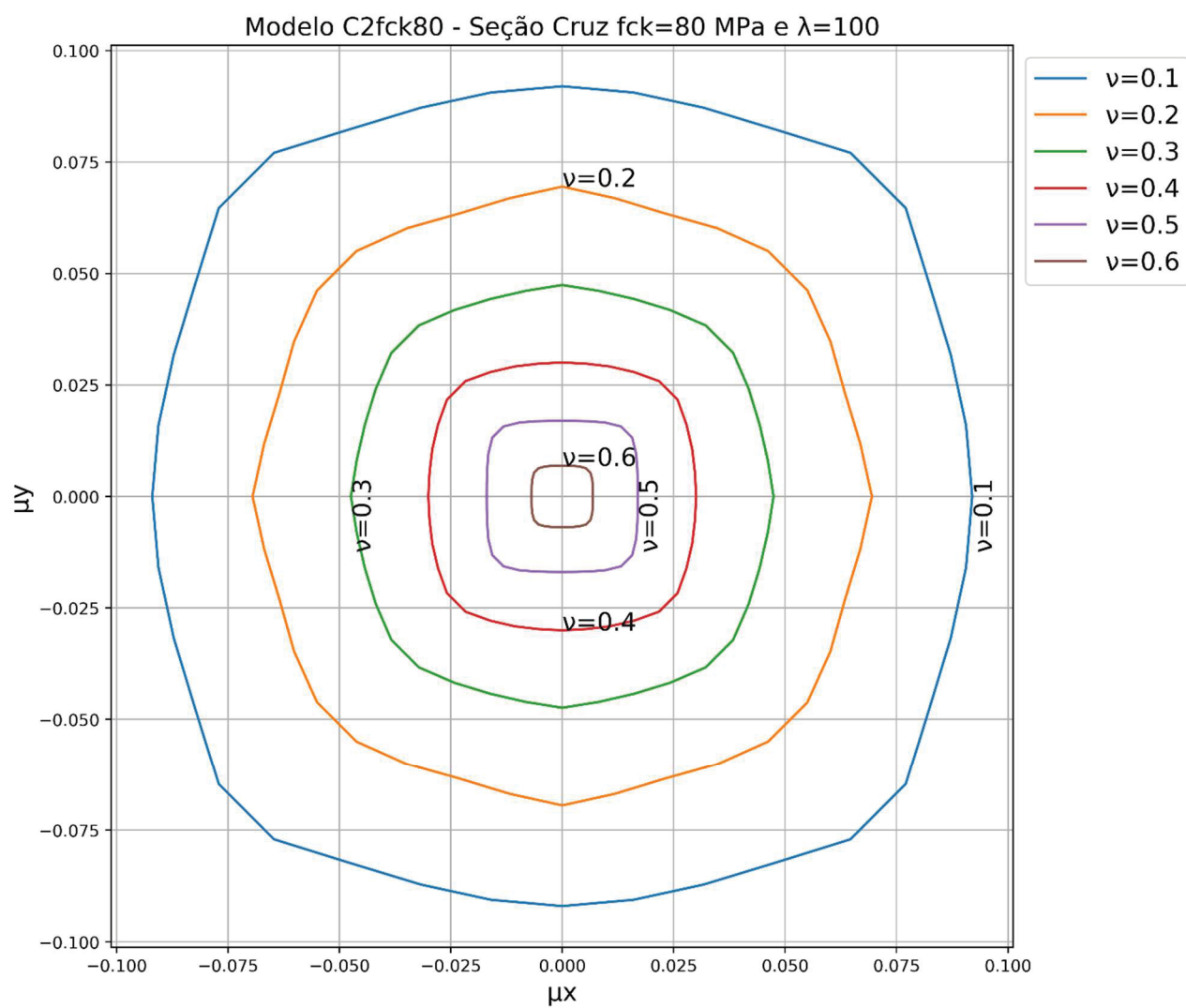
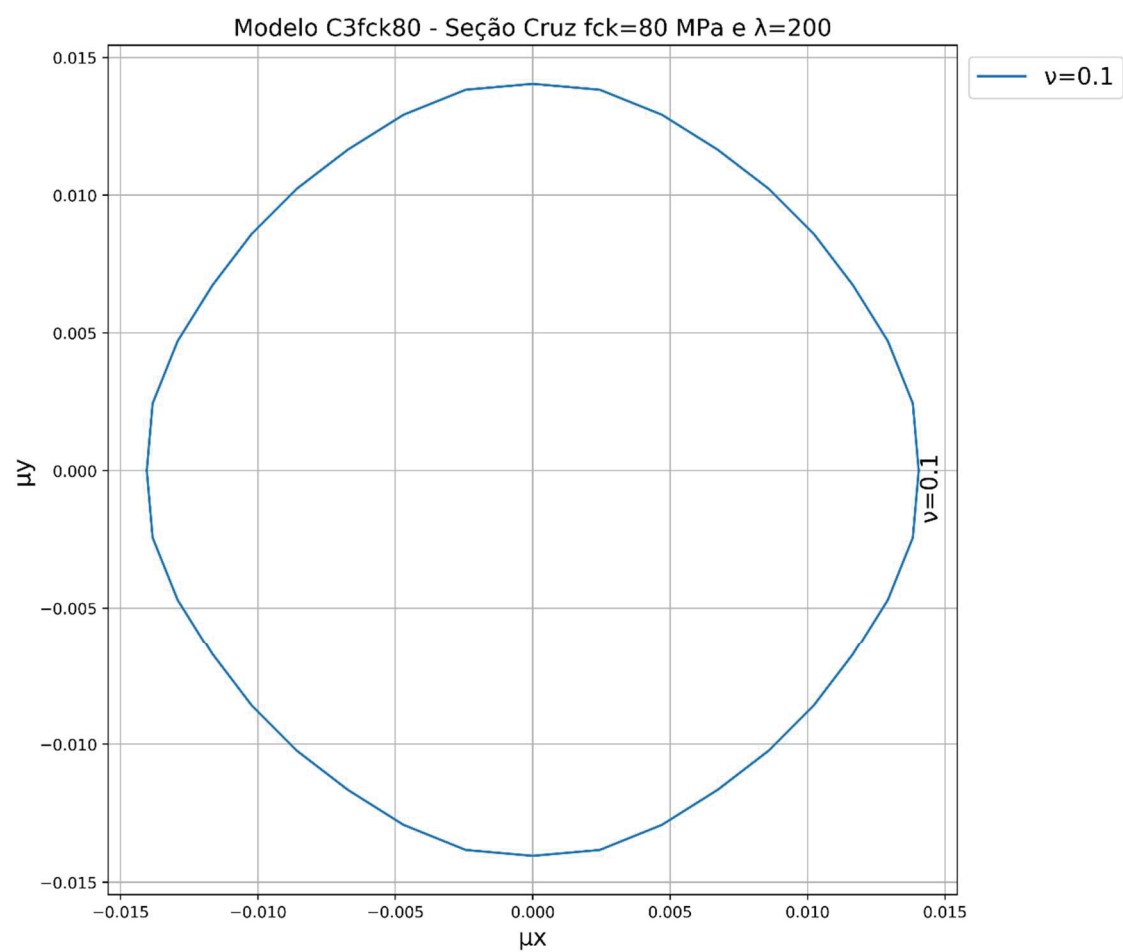


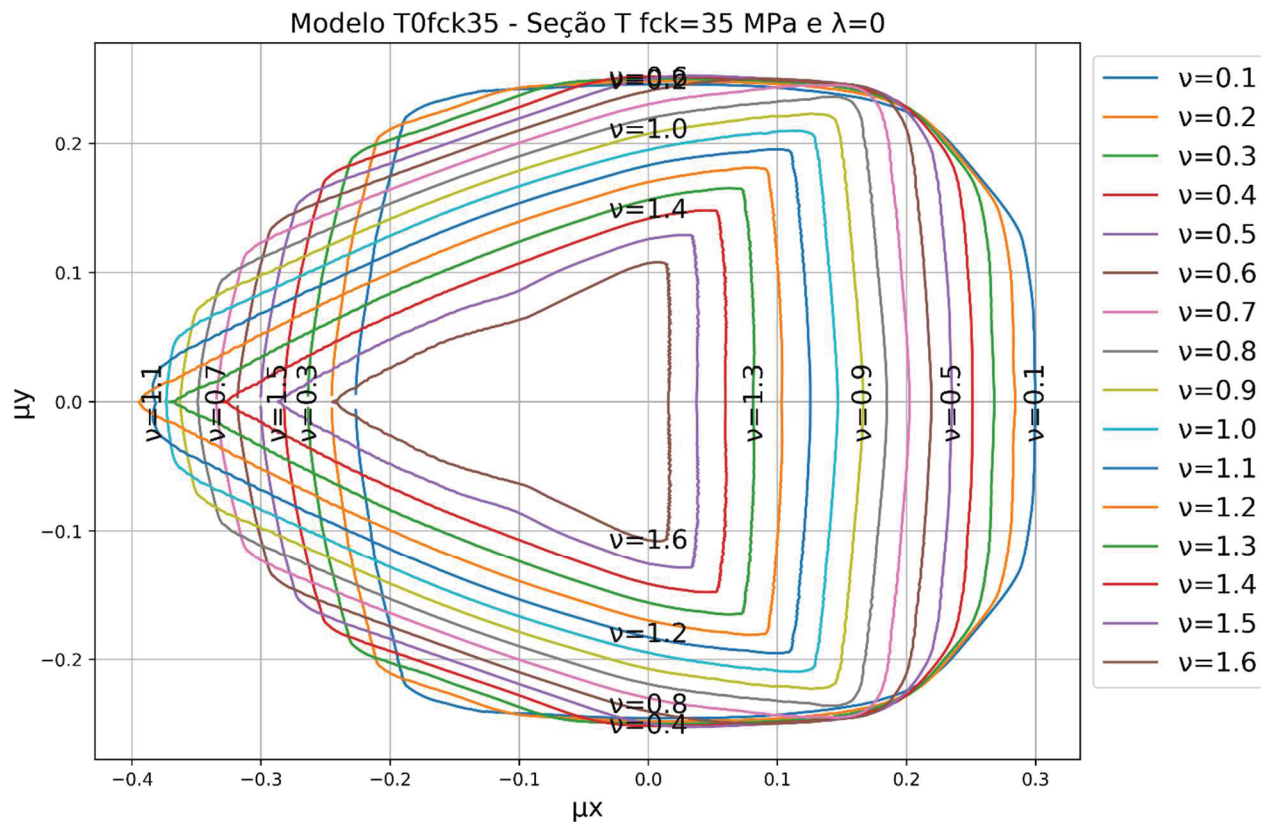
FIGURA 108 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO C3 (PILAR DE SEÇÃO EM CRUZ, FCK DE 80 MPa E $\lambda=200$)



APÊNDICE D - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES

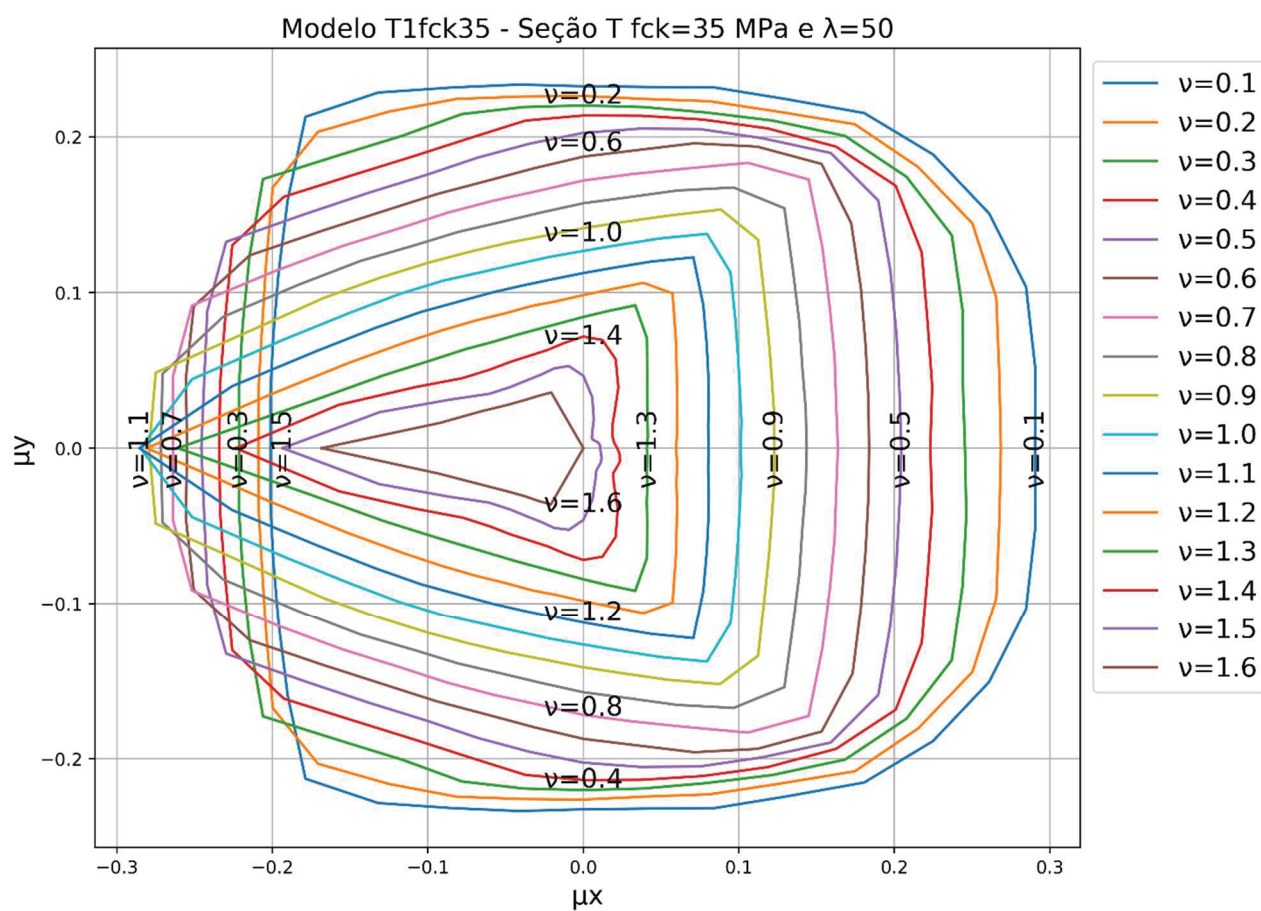
ANALISADOS DE SEÇÃO EM “T”

FIGURA 109 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T0 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPa E $\lambda=0$)



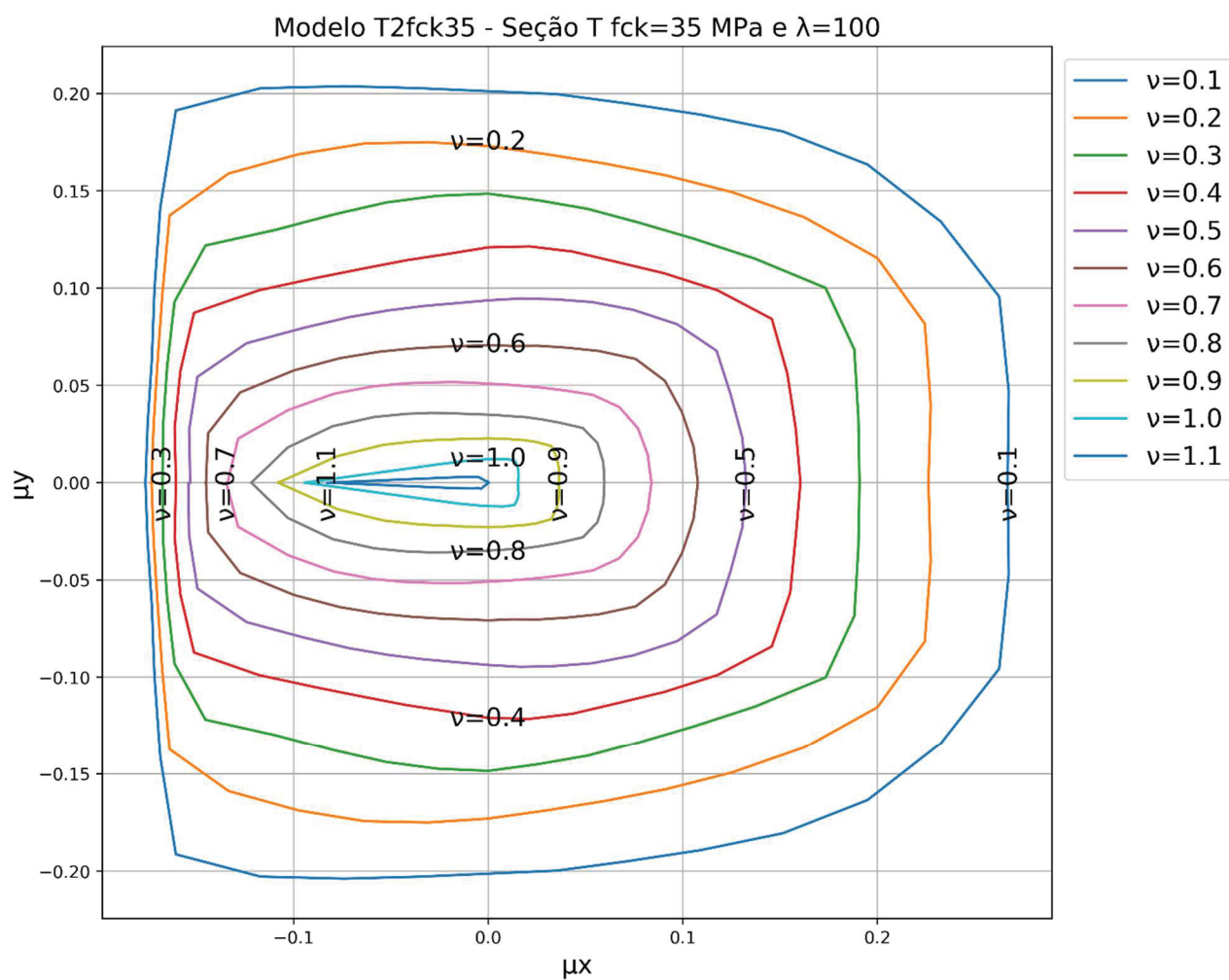
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 110 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T1 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPa E $\lambda=50$)



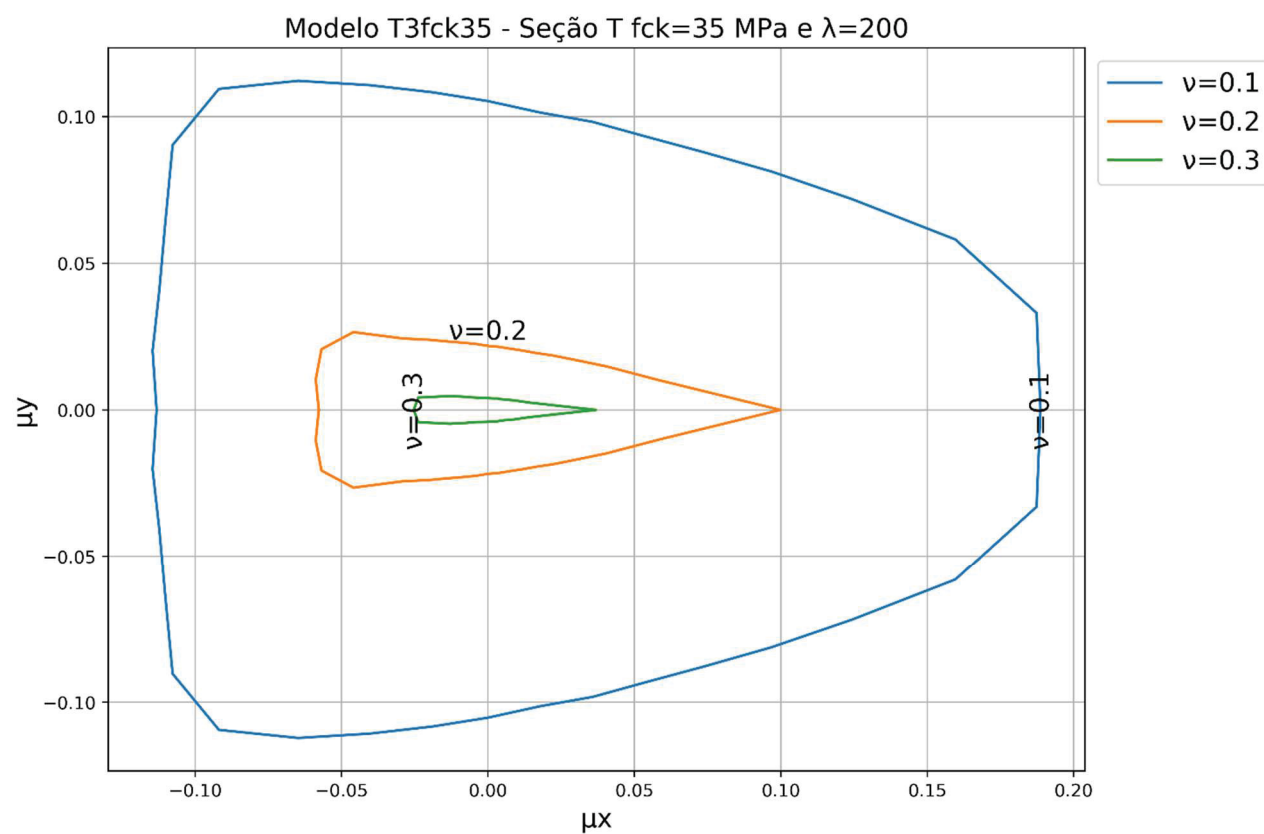
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 111 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T2 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 112 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T3 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 35 MPa E $\lambda=200$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 113 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T0 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPa E $\lambda=0$)

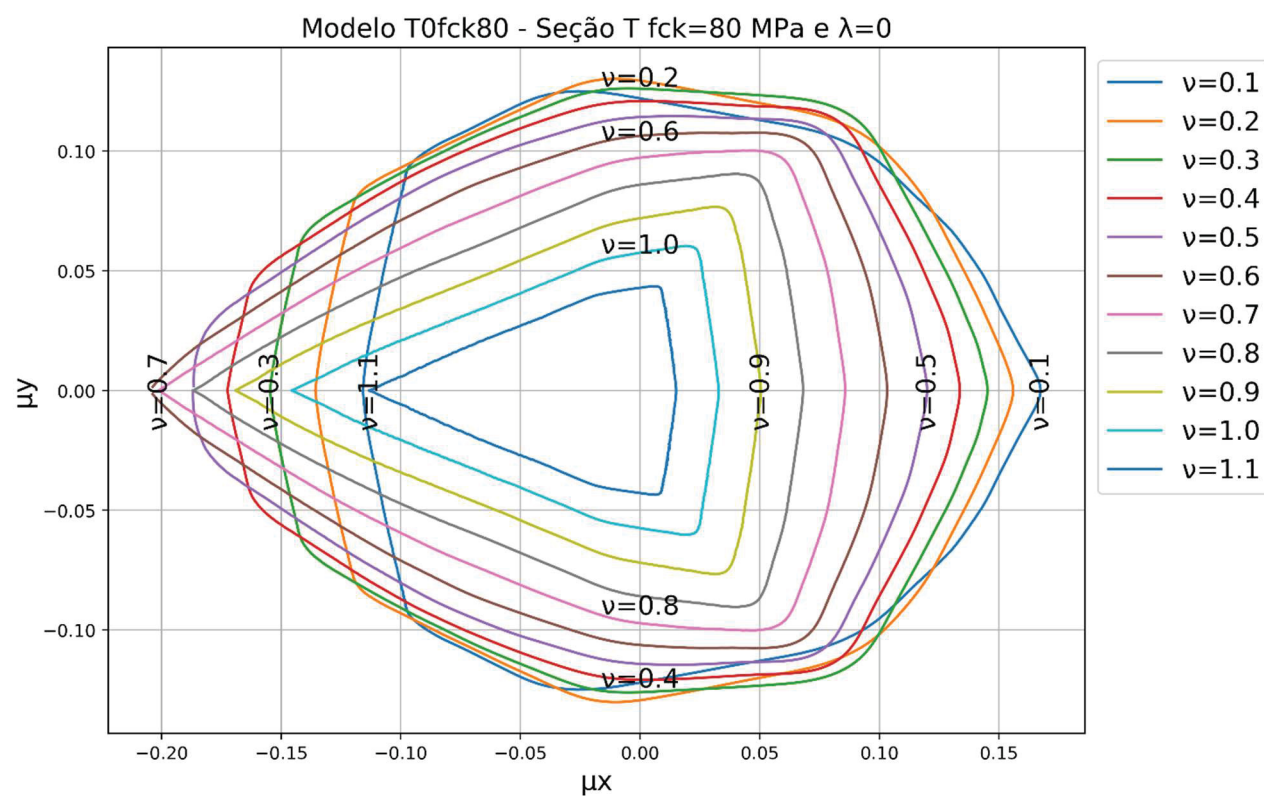
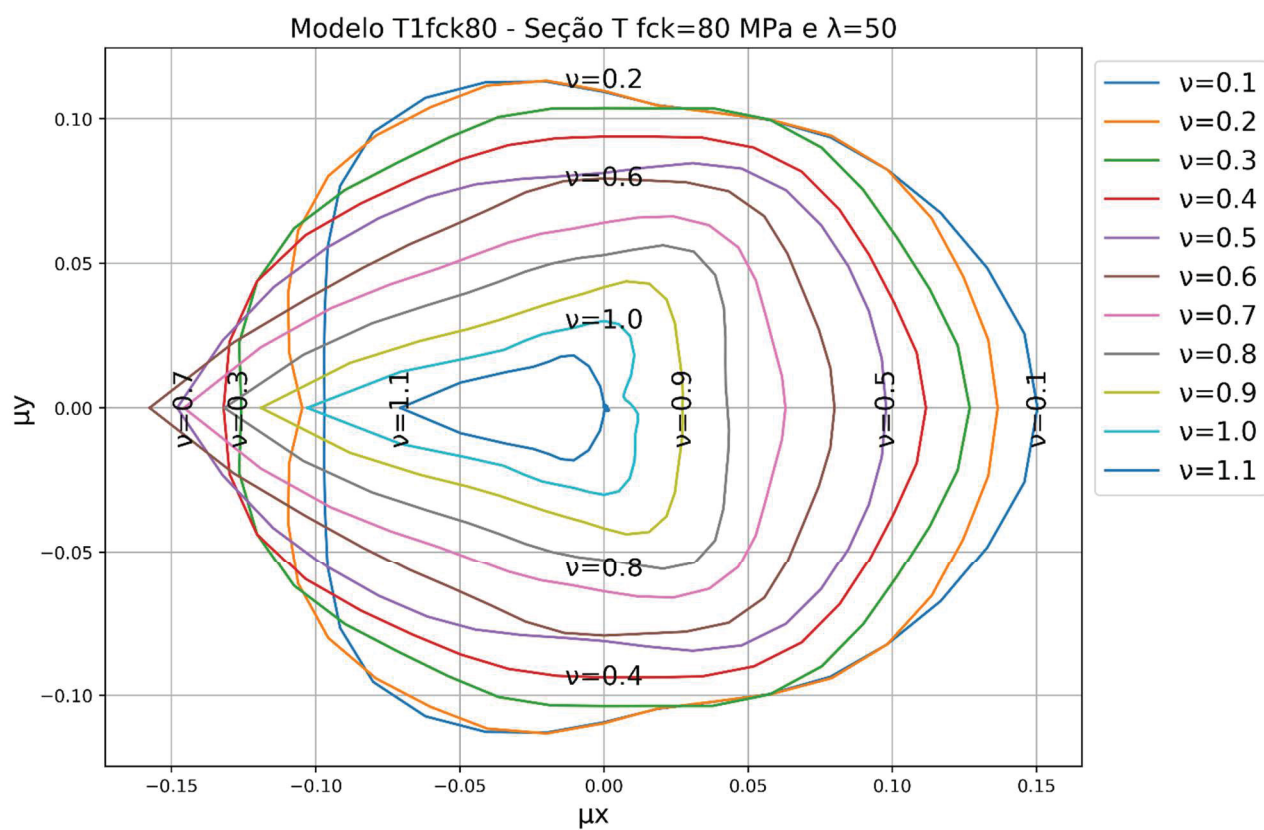
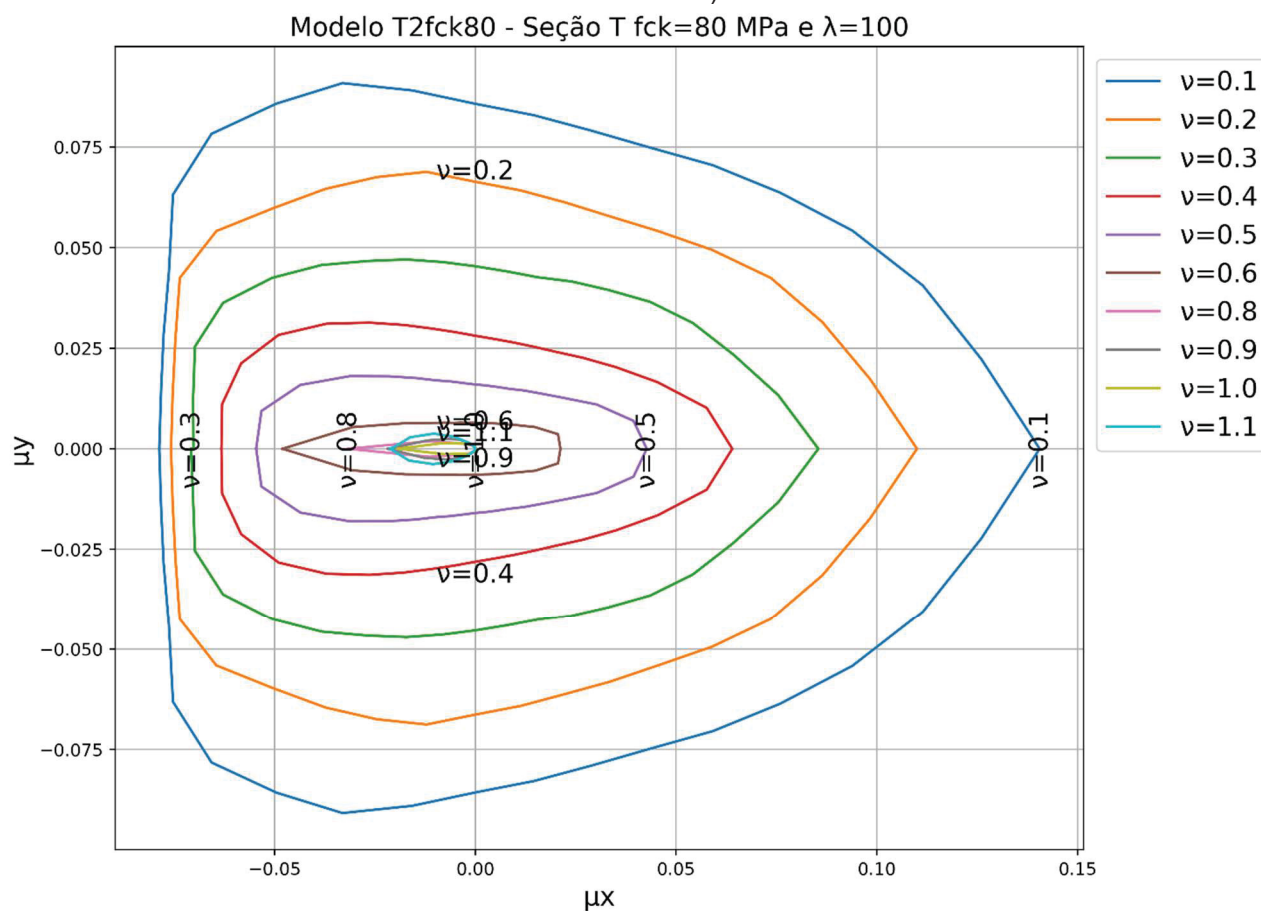


FIGURA 114 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T1 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)



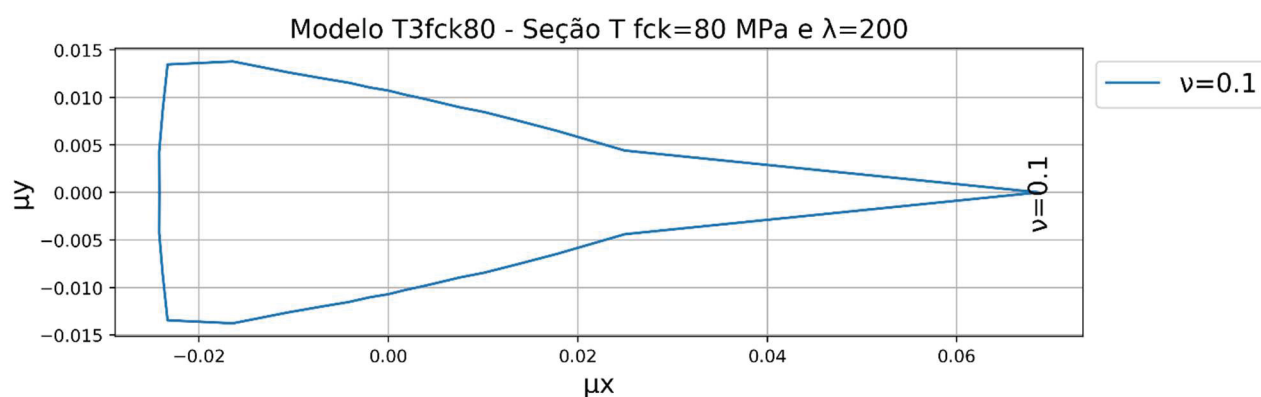
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 115 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T2 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 116 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO T3 (PILAR DE SEÇÃO EM T, FCK DE 80 MPa E $\lambda=200$)

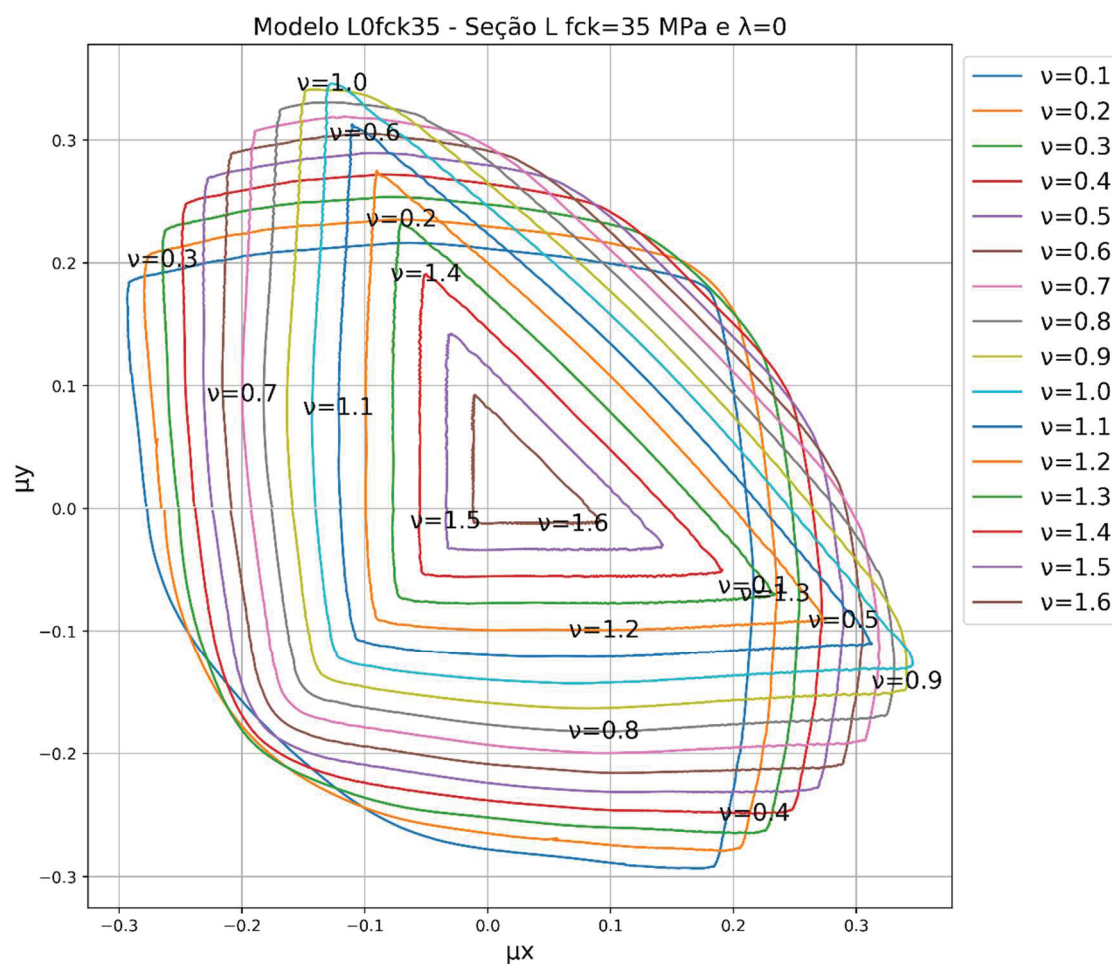


FONTE: O autor (2017).

APÊNDICE E - DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DOS PILARES

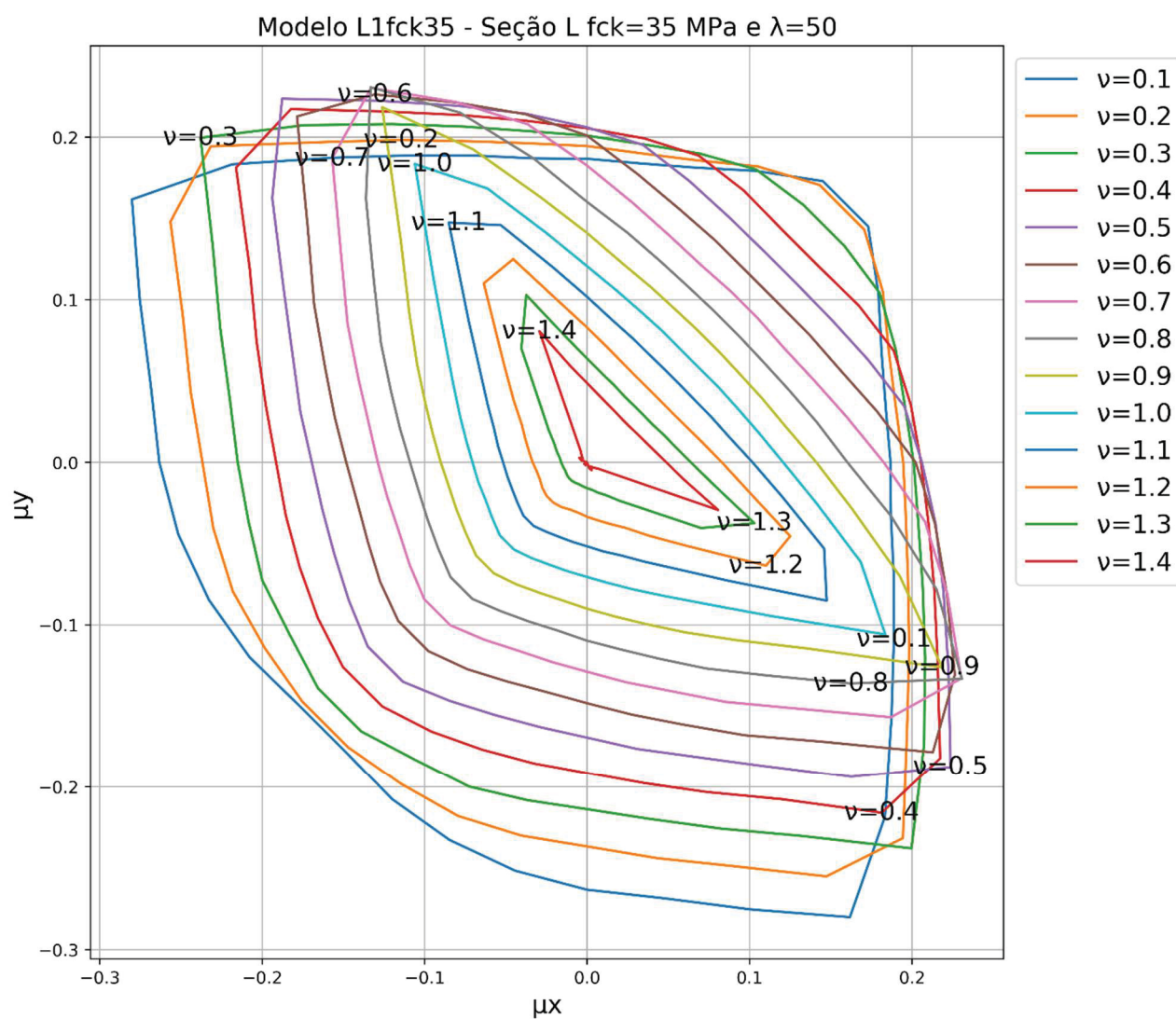
ANALISADOS DE SEÇÃO EM “L”

FIGURA 117 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L0 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPa E $\lambda=0$)



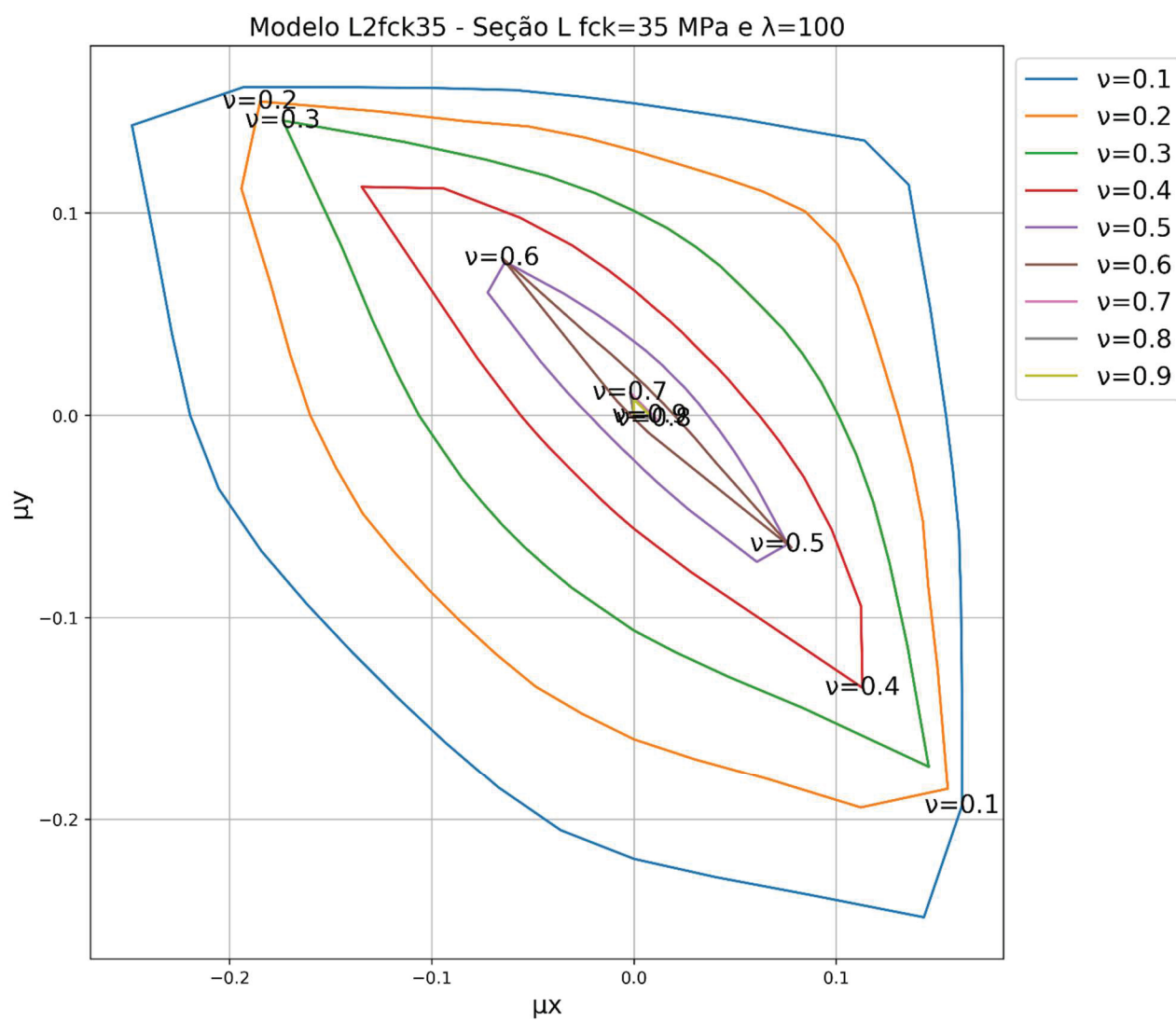
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 118 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L1 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPa E $\lambda=50$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 119 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L2 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 120 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L3 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 35 MPa E $\lambda=200$)

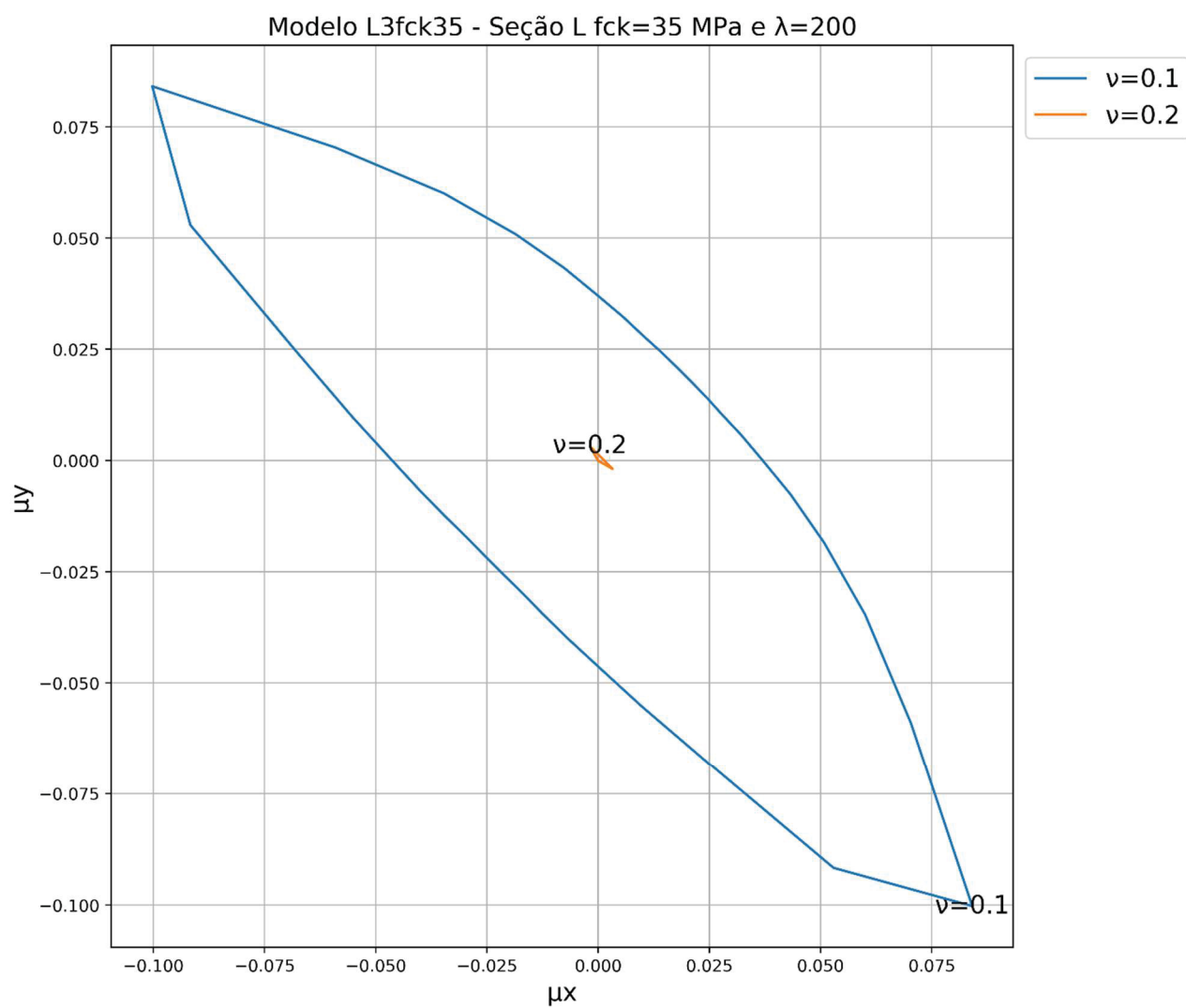


FIGURA 121 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L0 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPa E $\lambda=0$)

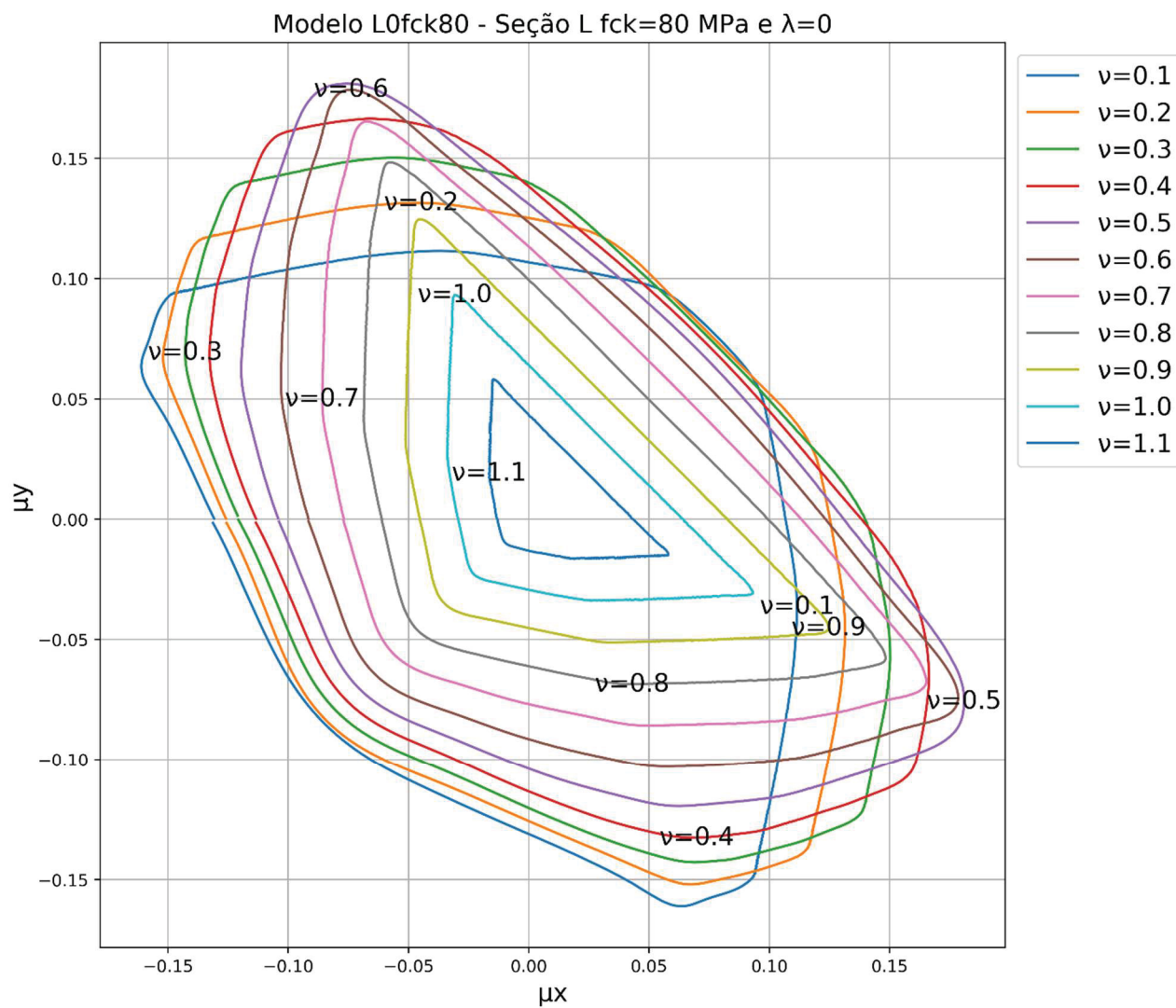
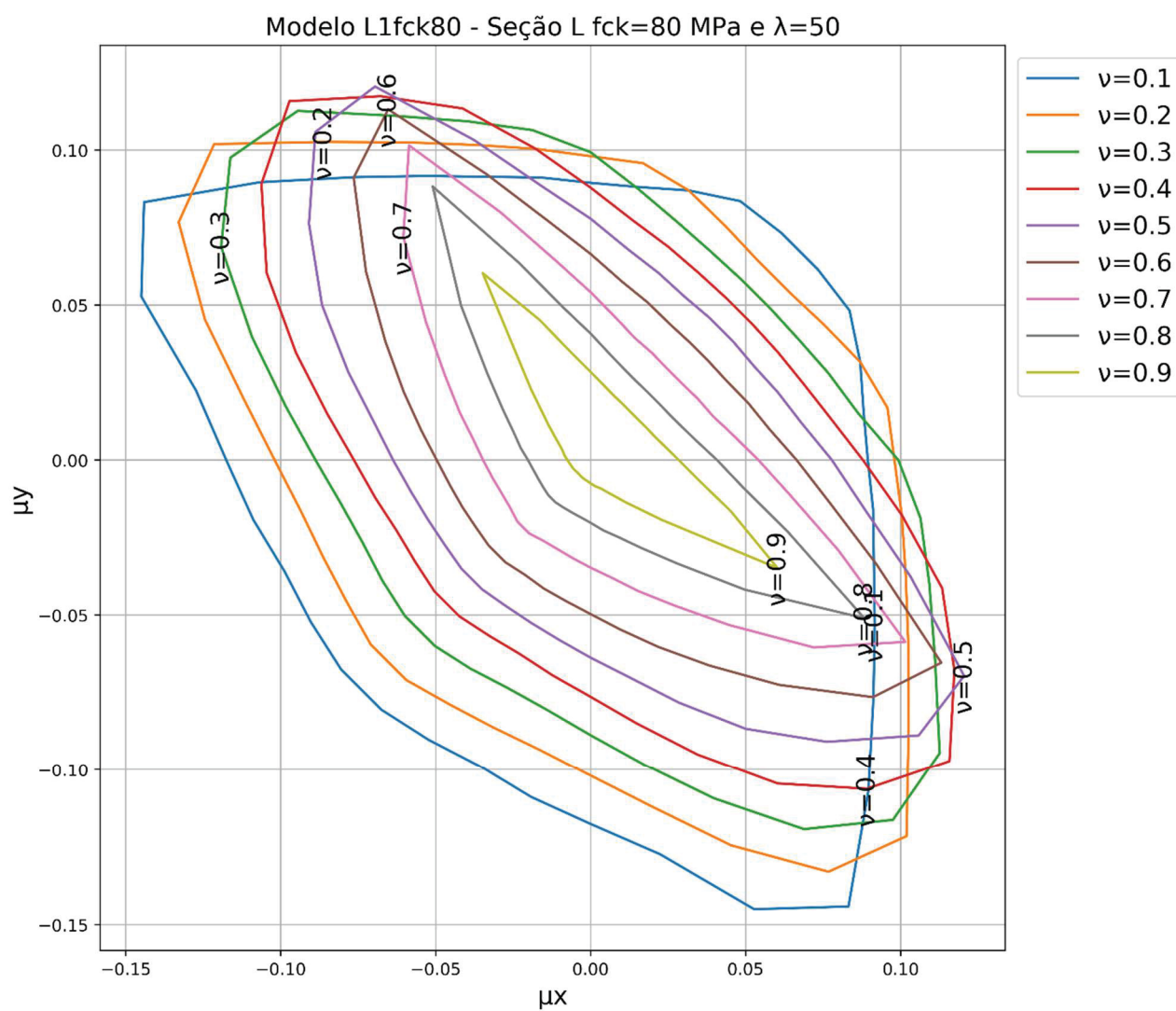
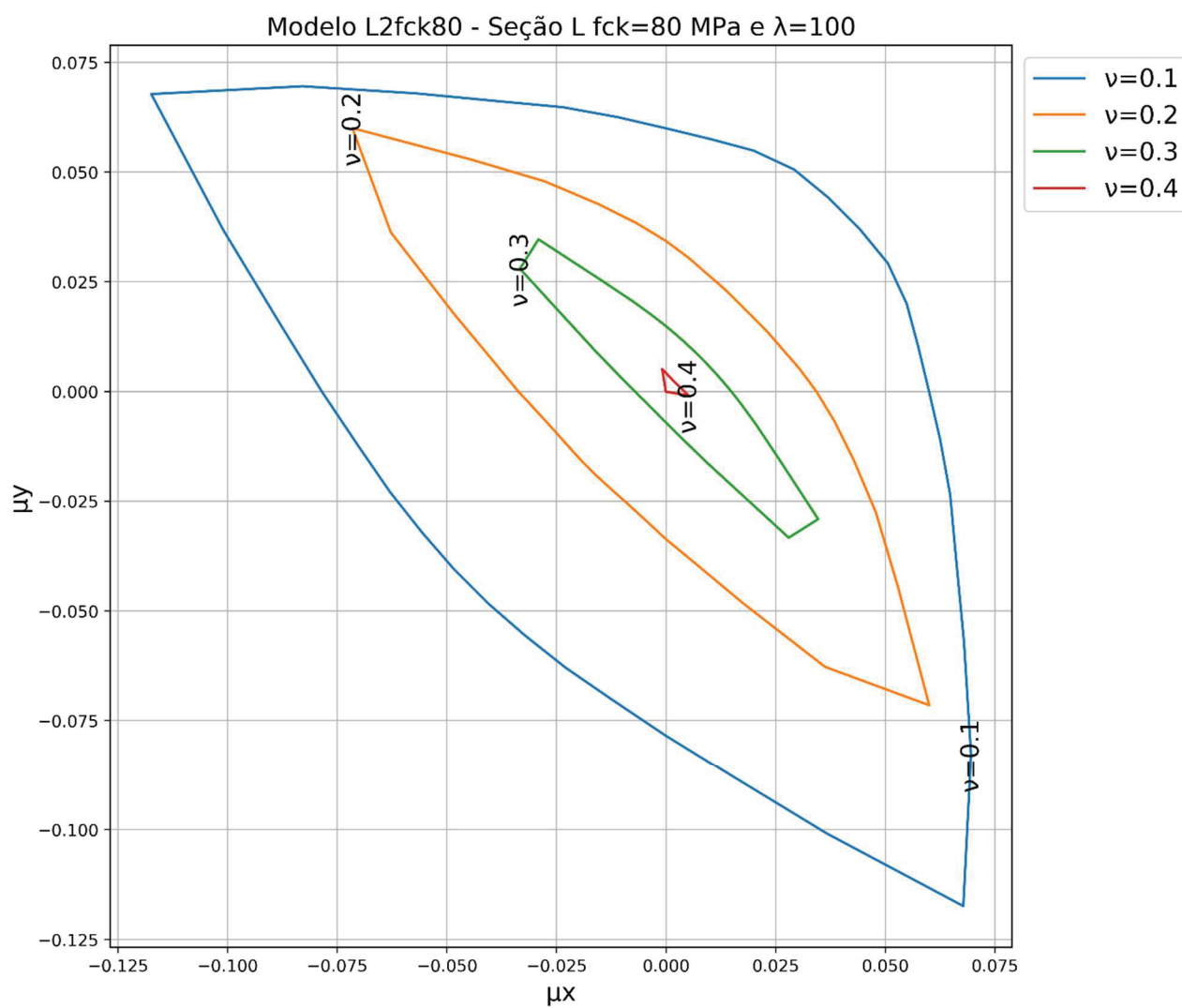


FIGURA 122 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L1 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPa E $\lambda=50$)



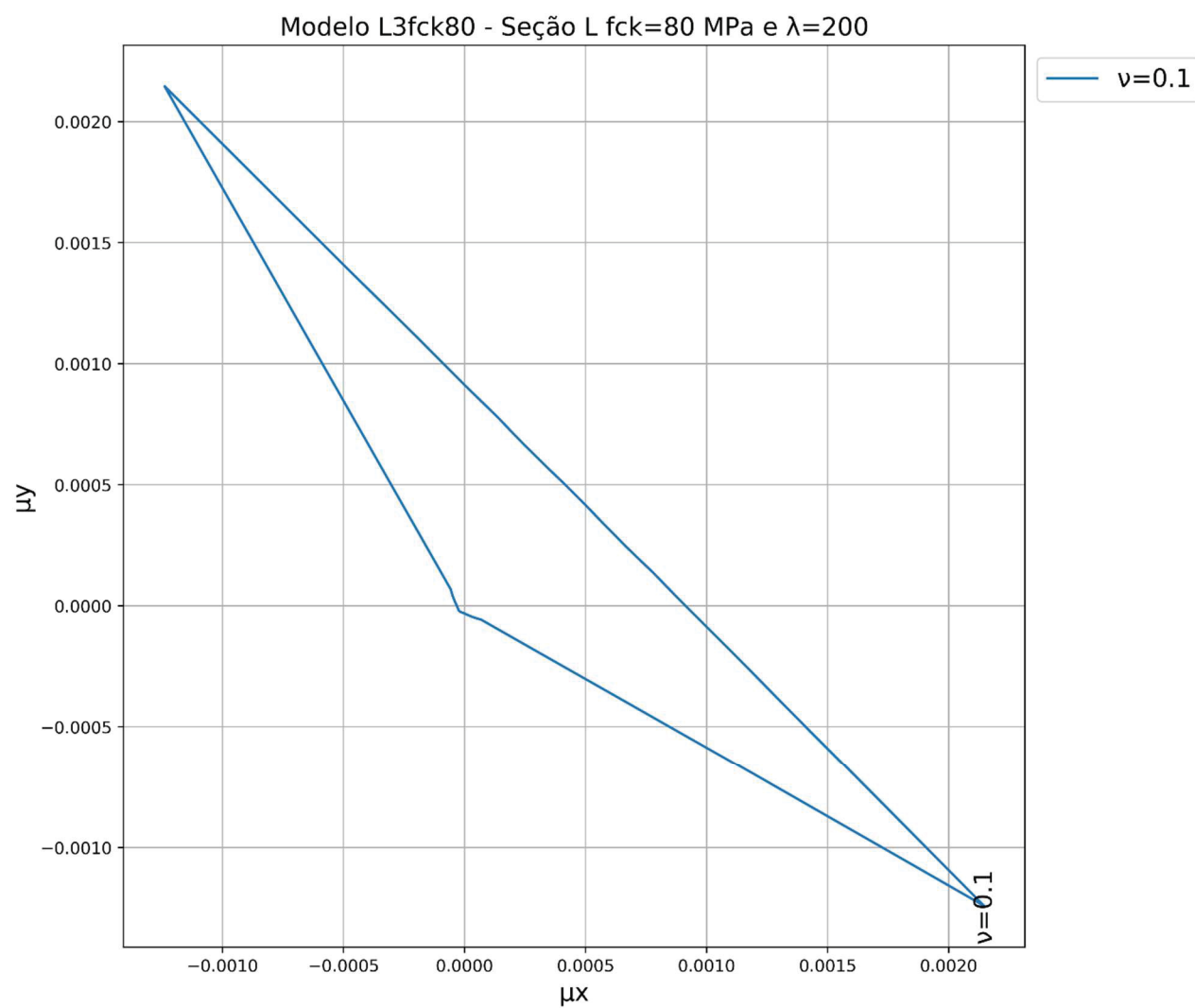
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 123 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L2 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPa E $\lambda=100$)



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 124 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA MODELO L3 (PILAR DE SEÇÃO EM L, FCK DE 80 MPa E $\lambda=200$)



FONTE: O autor (2017).